

🌀 Baccalauréat spécialité 🌀

L'intégrale de mai à novembre 2025

Pour un accès direct cliquez sur les liens [bleus](#)

Amérique du Nord J1 – 21 mai 2025	3
Amérique du Nord J2 – 22 mai 2025	9
Amérique du Nord J2 (secours)– 22 mai 2025	14
Asie J1 – 11 juin 2025	18
Asie J2 – 12 juin 2025	22
Centres étrangers J1 – 12 juin 2025	27
Centres étrangers J2 – 13 juin 2025	32
Métropole J1 – 17 juin 2025	36
Polynésie J1 – 17 juin 2025	42
Métropole J2 – 18 juin 2025	48
Polynésie J2 – 18 juin 2025	54

[À la fin index des notions abordées](#)

EXERCICE 1

6 points

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

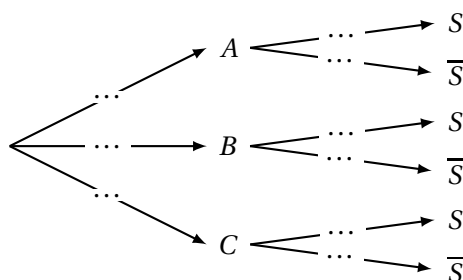
Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A »;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B »;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C »;
- S : « La connexion est stable ».

On note $\bar{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.
3. Calculer la probabilité $P(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.
5. On suppose désormais que la connexion est stable.
Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.
On donnera la valeur arrondie au millièm.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
 - b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millièm.*
2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.
 - a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.
 - b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.
 3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.

- a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.
On admet que $V(F_n) = \frac{0,123975}{n}$.
- b. Vérifier que : $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$
- c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

EXERCICE 2**5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1 .
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- a. Calculer a_0 et a_1 .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n - 1$$

- d. En déduire la limite de la suite (a_n) .
3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```

1  def algo(p):
2      u=2
3      n=0
4      while u-1>p:
5          u=(2*u+1)/(u+2)
6          n=n+1
7      return (n,u)
```

- a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
- b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

EXERCICE 3**4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- A(3 ; -3 ; -2)
- B(5 ; -4 ; -1)
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 4

5 points

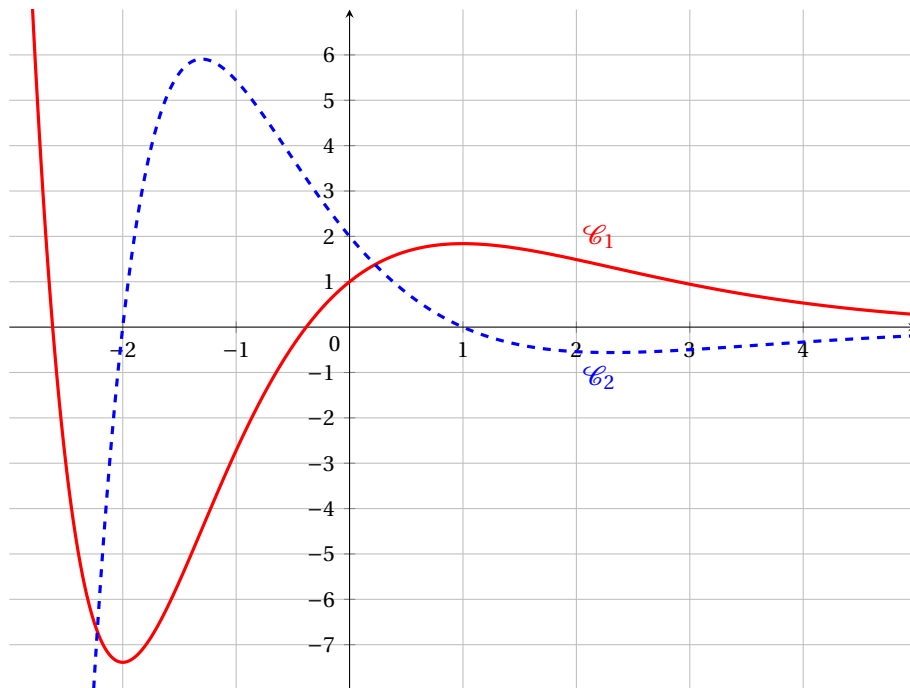
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) .

Déterminer alors l'expression de la fonction g .

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2) e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1) e^{-x}$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7) e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

- d. En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

EXERCICE 2**5 points**

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

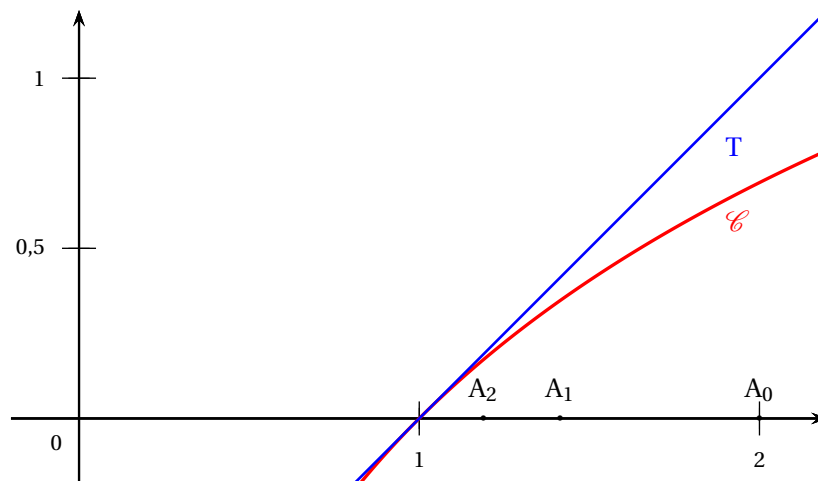
Partie A

1.
 - a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 - b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 - d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$ et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$.

- a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
 - b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
 - c. Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

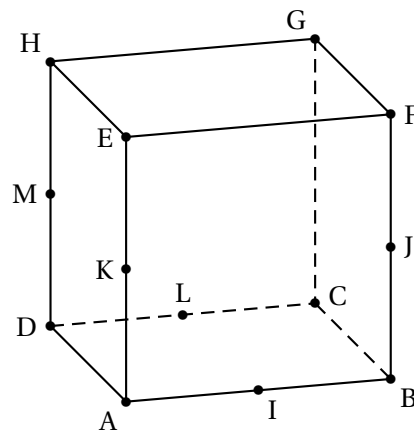
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

EXERCICE 3

5 points

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A(2 ; 0 ; -1)$ et $B(5 ; -3 ; 7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

EXERCICE 4

5 points

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

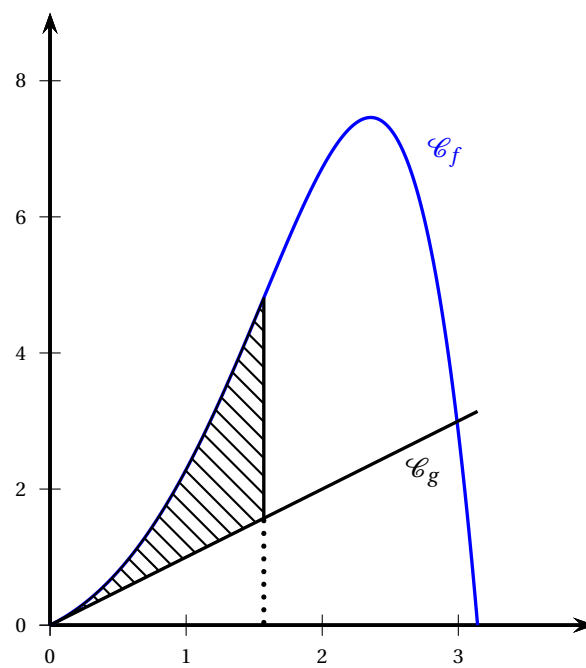
$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



Sujet 2 (secours)

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x e^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2) e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α , au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x e^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
2.
 - a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
 - b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x - 3y + z - 6 = 0$.

1. **Affirmation :** La droite D' , qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est parallèle à la droite } D.$$

2. On admet que les points $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 3; -4)$ et $C(6; 3; 9)$ ne sont pas alignés.

Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A , B et C .

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

4. **Affirmation :** Le point $F(-3; -3; 3)$ est le projeté orthogonal du point $E(-5; 0; 2)$ sur le plan P .

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D .

Note du rédacteur « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »

EXERCICE 3

5 points

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les événements suivants :

C : « la personne a été contaminée »

V : « la personne a été vaccinée ».

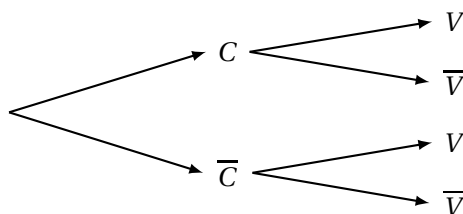
Les événements contraires des événements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.

2. a. Calculer $P(C \cap V)$.

b. En déduire $P(\overline{C} \cap V)$.

3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
 - a. « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
 - b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »
6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.
 La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
 On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.
On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$.
 - a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.
 - b. Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

EXERCICE 4**5 points**

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0 .

2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- α un réel quelconque;
- les points $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(\alpha; 3; \alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α , les points A , B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135° .

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1; 2; 2)$.

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω .

Exercice 2

5 points

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication »;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2.
 - a. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
 - b. Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95. Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n .
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
 - a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n .

- a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.
- b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

Exercice 3**5 points**

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```

1 def mystere(k) :
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k :
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n

```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 4**5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
 - a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \int_1^2 f(x) dx$.
 - a. Calculer I .
 - b. Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

- a. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

EXERCICE 1

5 points

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».

(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.

Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.

Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

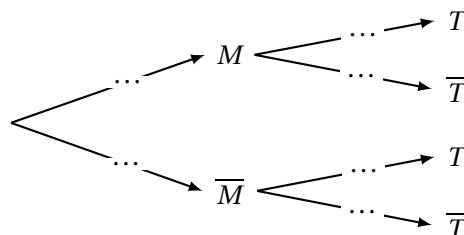
« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».

(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.

Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.

On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p .

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p .
3. Montrer que $P_T(M) = \frac{999p}{994p + 5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de 0,36.

On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.

Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'évènement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

EXERCICE 2

5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```

1  def suite(n) :
2    U=30
3    W=45
4    for i in range (1,n+1) :
5      U=U/2+10
6      W=W/2+U/2+7
7    return W

```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. a. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

- b. On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

EXERCICE 3

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère :

- les points $C(3; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $H(-6; 2; 2)$ et $J\left(\frac{-54}{13}; \frac{62}{13}; 0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x + 3y + 6z - 6 = 0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 3 = 0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -8 + \frac{1}{3}t \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \\ z = -4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H .

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1} , est $17,3^\circ$.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD) .

EXERCICE 4

5 points

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

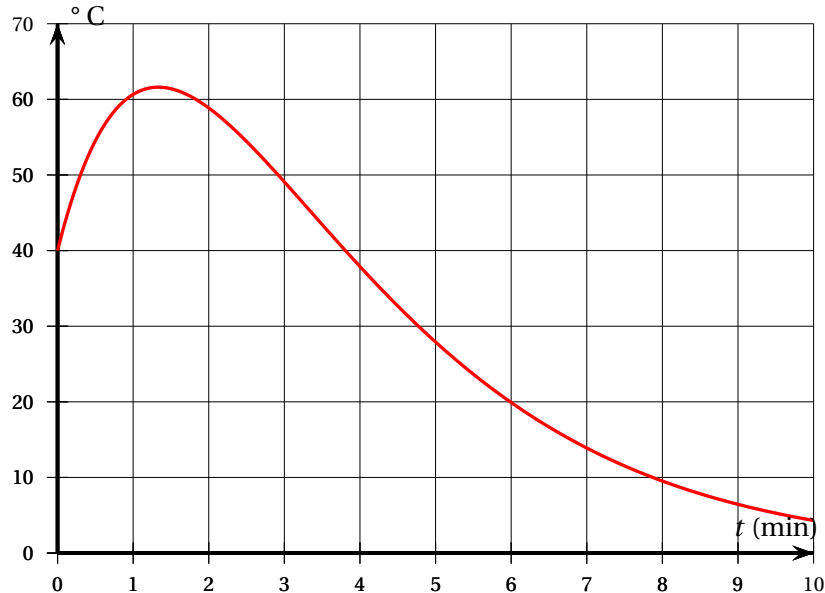
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0; 10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

- Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.

On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

- On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b .
- On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60e^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a .

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)e^{-0,5t}$$

- Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$.
- Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
 - Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
 - Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
- On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2 , exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t) dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$

- b.** En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.moyenne

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

6 points

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les événements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total »;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les événements contraires de T et E .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\overline{T} \cap E)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1 .
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.
Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

Exercice 2 — QCM

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(1; 5; 2)$
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites (AB) et (d) sont :
 - a. sécantes non perpendiculaires.
 - b. perpendiculaires.
 - c. non coplanaires.

- d. parallèles.
2. La droite (AB) est :
- incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
 - strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
 - sécante et non orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
 - orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont :
- sécants et non perpendiculaires.
 - perpendiculaires.
 - confondus.
 - strictement parallèles.
4. On considère le point $C(0 ; 1 ; -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré est :
- 90°
 - 51°
 - 39°
 - 0°

Exercice 3

6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

- Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
- Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
- On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2 ; 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```

from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)

```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
 - la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.
On donnera les valeurs arrondies au centième.
- b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 4

4 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): y' + 0,48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$h(t) = \frac{1}{120}.$$

Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K e^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

6 points

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ .
5.
 - a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ .
 - b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
 - a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
 - b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```

n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n+1
print (2025 + n)

```

Exercice 2

6 points

Partie A

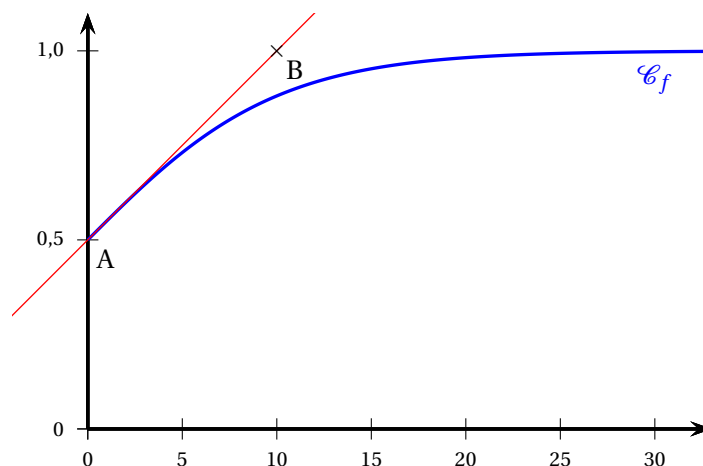
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$.

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
 - b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Exercice 3**4 points**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .

Exercice 4**4 points**

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
 - c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2.
 - a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
 - b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d) .
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E , on note $\bar{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E .

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $p(R) = 0,8397$.

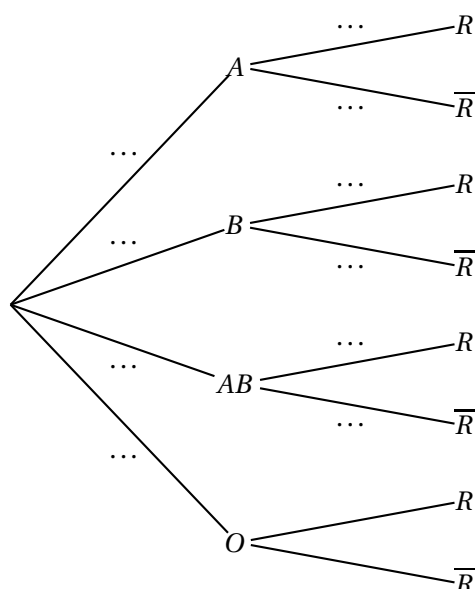
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,071 4.

6. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.



- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
 - c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.
7. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1, 2, 3, ..., N où N est un entier naturel non nul.
- On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
- On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N .
- On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.
- On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.
- a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice?
 - b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
 - c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .
Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.
 - d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95.$$

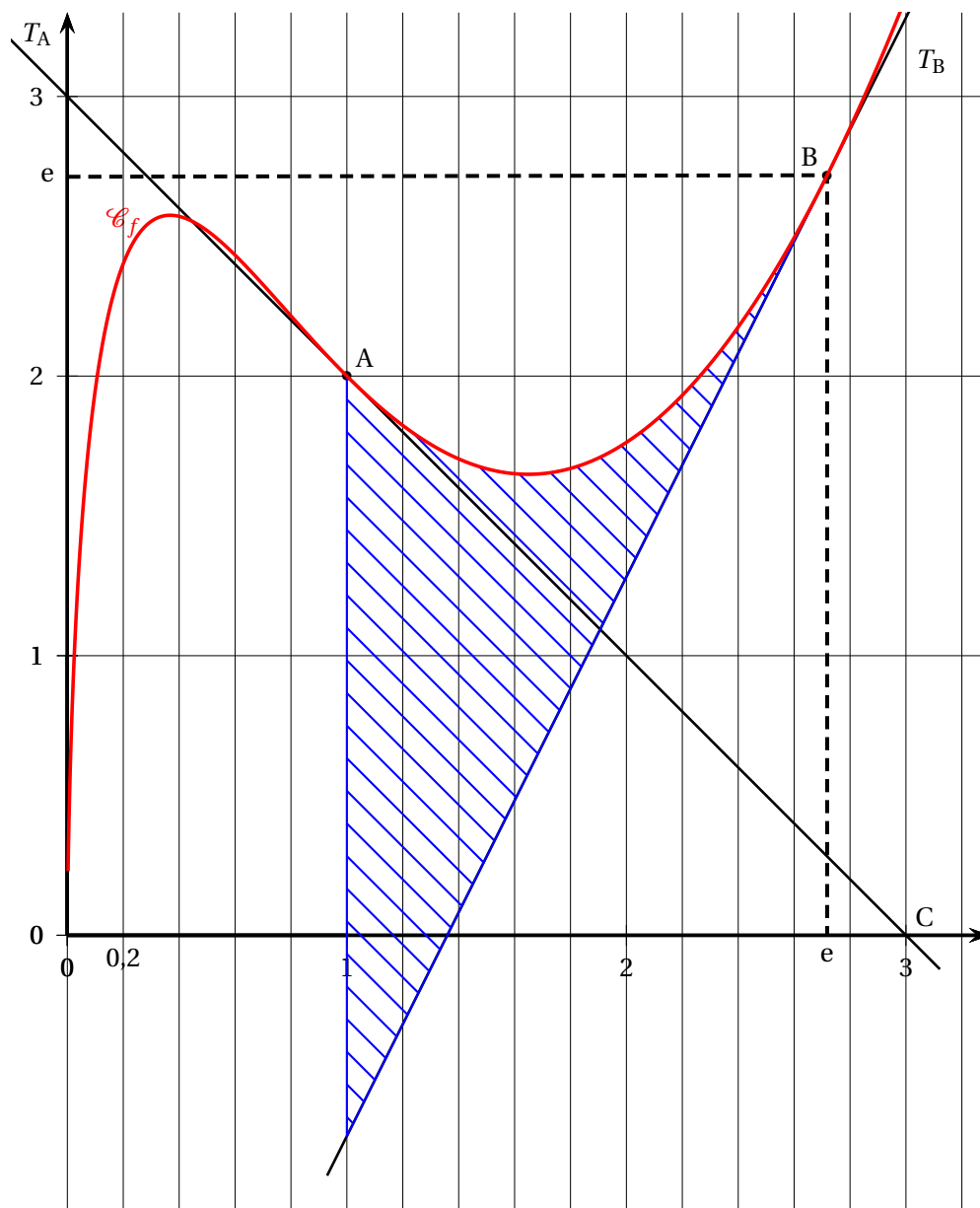
EXERCICE 2**6 points**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A(1; 2);
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B(e; e).

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point C(3; 0).



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3[$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

EXERCICE 3

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2 ; -1 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 4

5 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

- Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
- On note h la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0 ; 20]$.

- Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - Justifier que $L = 15$.
- Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
 - Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u= 1
    while ..... :
        n=.....
        u=.....
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$;

- f est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .
3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Baccalauréat Polynésie 17 juin 2025

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1

5 points

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatrics*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.

L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ son événement contraire.

Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'évènement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2.
 - a. Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie B

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.

On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie C

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \dots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20} .
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

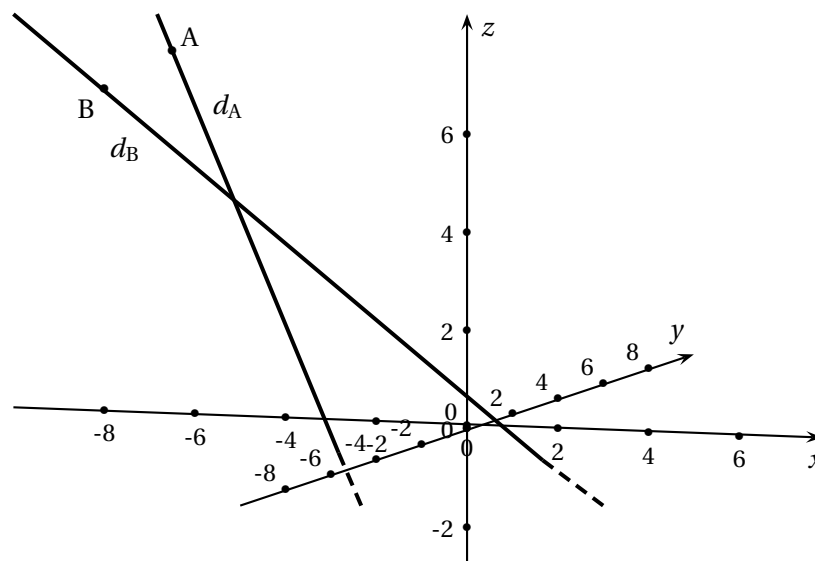
Exercice 2**5 points**

Deux avions sont en approche d'un aéroport.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.

L'unité des axes correspond à 1 km.

On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7; 1; 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \end{cases} \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.
2.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.
 - b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision?
3.
 - a. Démontrer que l'avion Alpha passe par la position E(-3 ; -1 ; 1).
 - b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

- c. Vérifier que le point F(-1 ; -3 ; 3) est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B .
 - d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.
4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).

Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée?

Exercice 3

5 points

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1.
 - a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = (n - x)x^{n-1} e^{-x}.$$

- b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

2. Justifier par le calcul que le point A(1 ; e^{-1}) appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.
 - a. Donner une interprétation graphique de I_n .
 - b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Calculer I_0 .
3. a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .
5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}.$$

6. a. Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante `e`.

```
def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

Exercice 4

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k e^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(5; -1; 8)$ et $C(2; 1; 3)$.

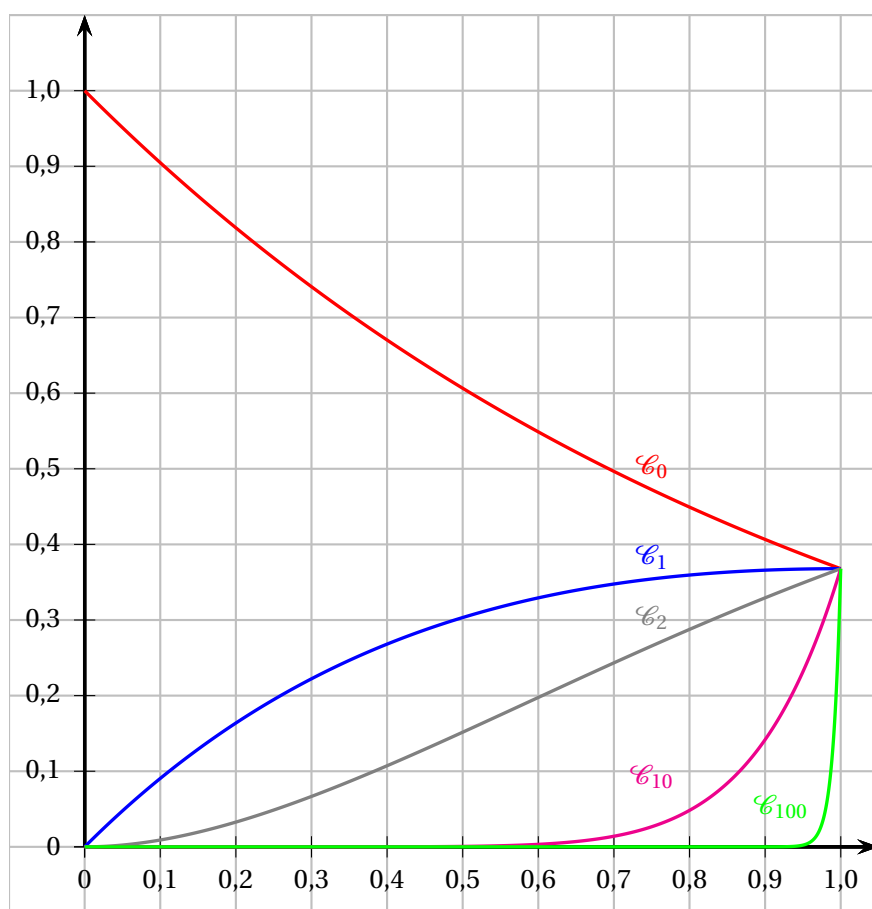
Affirmation 4 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30° .

5. On considère une fonction h définie sur $]0; +\infty]$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0; +\infty]$ par :

$$h''(x) = x \ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $[e^3; +\infty[$.

ANNEXE : exercice 3



EXERCICE 1

5 points

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans cet exercice on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multi-sports au cours du week-end.

Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours.

On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les événements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son événement contraire. Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,6$.

De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,3 ;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,4.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que $P(B) = 0,34$.
4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours.
Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.
5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.
On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de 0,24.
 - a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?

- c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisport. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minutes avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.

On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

EXERCICE 2

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d: \begin{cases} x &= \frac{3}{2} + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d': \begin{cases} x &= s \\ y &= \frac{3}{2} + s \\ z &= 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. a. Démontrer que le point H(-1 ; 0 ; 2) est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
- b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle [0 ; 1].

- Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
- Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M?

EXERCICE 3

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n \geq n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page suivante.

On précise que :

- T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 8;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

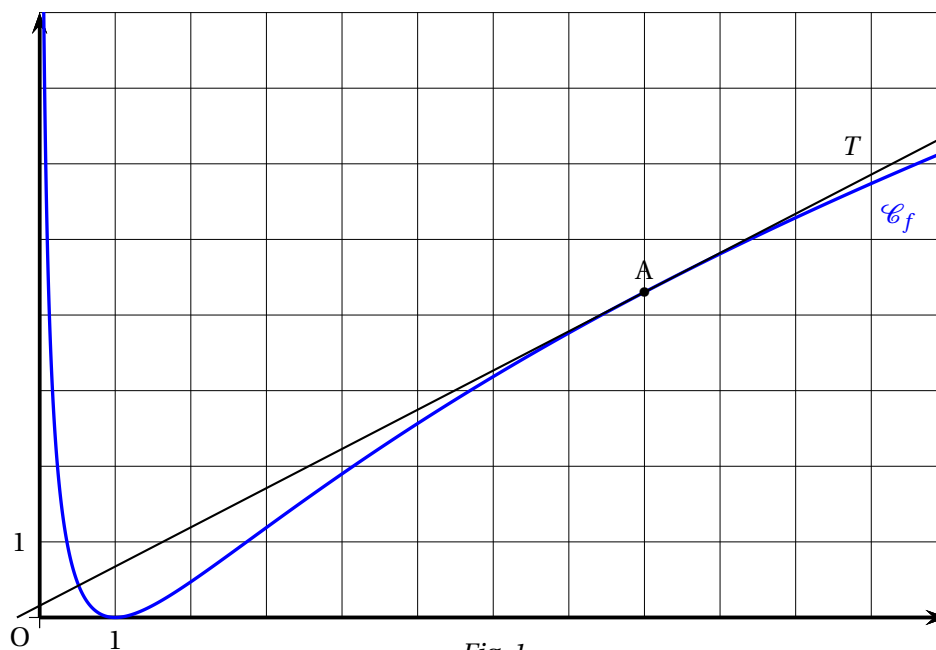


Fig. 1

Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. Affirmation 4 : Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 4

6 points

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition.

On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$.

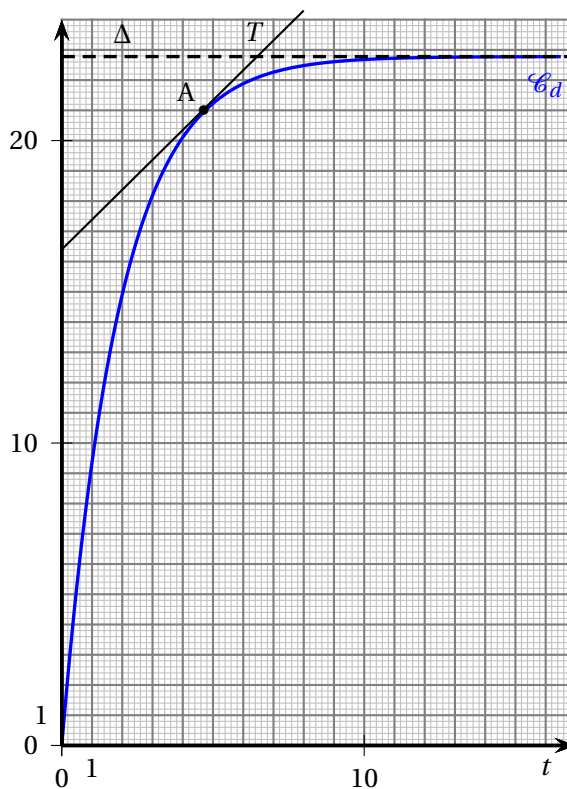


Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.

D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + 0,6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0 ; +\infty[$.

- b. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = t e^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .

- c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$.

- d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0 ; +\infty[$.

- a. Montrer que pour tout réel $t \in [0 ; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}$.

- b. En admettant que :

$$v(t) = 12 e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

- c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

- d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.

Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1

5 points

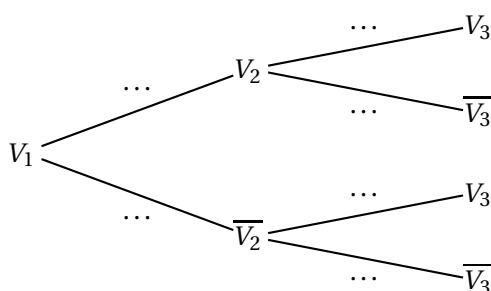
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
 Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
 Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
 Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).
 La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
 Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 1 fg;
- $\overline{V}_n$ l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 0 fg.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



- b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.

La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

- b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

- c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$.

```
1  def simulation(n):
2      donnee = 1
3      liste = [donnee]
4      for k in range(n):
5          if rand() < 0.1
6              donnee = 1 - donnee
7          liste.append(donnee)
9      return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

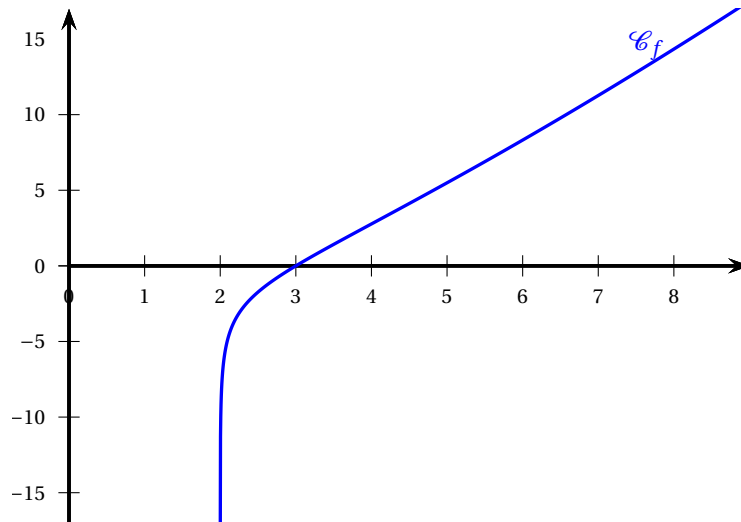
1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1]`.

Exercice 2**5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x - 2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.
Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
 - a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

- b. On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .
 - c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.
 - d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2; +\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3?

Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points suivants :

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.
 - a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
 - b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases} \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

Exercice 4

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

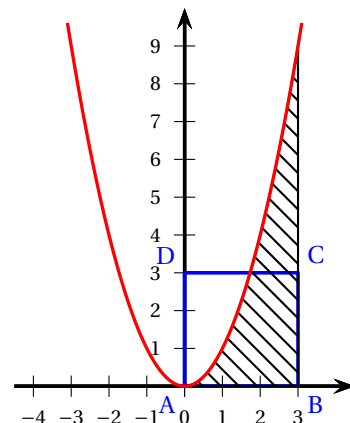
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f , ainsi que le carré ABCD de côté 3.

Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x) \, dx.$$

Affirmation n° 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \frac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = 2y - e^x.$$

Affirmation n° 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $[0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1) e^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Index

- arbre pondéré, 3, 15, 19, 22, 23, 27, 36, 42, 48, 54
- arrangements et combinaisons, 34
- Bienaymé-Tchebychev, 19, 28
- calcul d'aire, 57
- calcul d'aire, 8, 14, 39
- calcul d'angle, 6, 29, 46
- calcul d'intégrale, 21
- calcul de distance, 6
- calcul de dérivée, 8, 14, 21, 29, 33, 44, 56
- calcul de limite, 39
- coefficient directeur de droite, 33, 56
- combinaisons, 46, 57
- convexité, 14, 21, 38, 39, 46, 56
- démonstration par récurrence, 5, 10, 17, 20, 24, 30, 32, 50, 54
- distance d'un point à une droite, 40
- distance point-plan, 50
- droite et plan orthogonaux, 15, 24, 29, 57
- droite et plan parallèles, 15, 29
- droites non coplanaires, 6, 28, 40
- droites parallèles, 18, 29
- droites perpendiculaires, 28
- droites sécantes, 15, 28, 49
- équation de plan, 35, 44, 50
- équation de tangente, 7, 39
- équation différentielle, 7, 25, 30, 41, 46, 52, 58
- équation différentielle homogène, 53
- équation du second degré, 39
- espérance, 4, 19, 28, 35, 37, 43, 49
- extremum, 14
- fonction croissante, 29, 32
- fonction exponentielle, 8, 21, 25, 33, 44, 53
- fonction logarithme népérien, 29, 38, 55
- géométrie dans l'espace, 18, 24, 28, 35, 43, 57
- intégration par parties, 14, 26, 39, 45, 53, 58
- inégalité de Bienaymé-Tchebychev, 49
- inégalité de concentration, 43
- lecture graphique, 7, 25, 33, 38, 45, 51, 52, 56
- limite de fonction, 53
- limite de fonction, 8, 14, 21, 29, 34, 41
- limite de suite, 5, 23, 32, 45
- loi binomiale, 4, 16, 19, 23, 27, 35, 37, 42, 48
- mesure d'angle, 24
- moyenne, 25
- n-uplets, 57
- nombre dérivé, 38
- plans parallèles, 29
- plans perpendiculaires, 29, 35
- point d'inflexion, 8
- points coplanaires, 18, 50, 57
- points non alignés, 35
- position relative courbe-tangente, 14
- primitive, 8, 34
- probabilité conditionnelle, 4, 16, 19, 22, 23, 27, 42, 48
- probabilités, 3, 15, 18, 22, 27, 36, 42, 48, 54, 55
- projeté orthogonal, 15, 18, 24, 50, 57
- Python, 5, 20, 23, 30, 33, 40, 45, 55
- QCM, 28
- représentation paramétrique de droite, 6, 15, 24, 39, 43, 44, 49, 57
- signe d'une fonction, 8, 51
- sommaire*, 1
- somme de variables aléatoires, 28, 35, 37, 43, 49
- sphère, 18
- suite, 5, 16, 19, 23, 30, 40, 46, 50
- suite convergente, 17, 24, 30, 32, 40, 45, 50
- suite croissante, 20
- suite divergente, 46, 58
- suite décroissante, 17
- suite géométrique, 17, 23, 32
- théorème des valeurs intermédiaires, 53
- théorème du point fixe, 21, 25, 29, 34
- valeur moyenne d'une fonction, 34
- variance, 19, 28, 35, 37, 43
- variations de fonction, 21, 25, 29, 34, 53, 56

vecteur et plan orthogonaux, [35](#)

vecteur normal, [18](#), [39](#), [49](#)

vecteurs colinéaires, [50](#)

volume de tétraèdre, [57](#)

Vrai-Faux, [6](#), [15](#), [39](#), [45](#), [50](#), [57](#)