BTS Groupement D – septembre 2020

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 **12 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

A. Évolution de la population de poissons au fil des mois dans certains aquariums

Les deux questions suivantes sont des QCM (questionnaire à choix multiples). Dans chaque question, une seule proposition est correcte. Indiquer la bonne proposition. Aucune justification n'est demandée.

1. Dans un aquarium, il y a initialement 10 poissons.
On admet que la population de poissons augmente de 30 % chaque mois.
Quel est le nombre de poissons au bout de 5 mois ? Le résultat a été arrondi à l'unité.

   a. 12 **b.** 50 **c.** 160 **d.** 37

2. Dans un aquarium, au temps $t = 0$, on compte 10 poissons.
On modélise le nombre de poissons présents dans l'aquarium par une fonction g.
On admet que la fonction g est la solution de l'équation différentielle $y' + 0,3y = 0$ vérifiant la condition initiale $g(0) = 10$. Alors g est définie par :

   a. $g(t) = 10\,\mathrm{e}^{0,3t}$ **b.** $g(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0,3t}$ **c.** $g(t) = 10 + \mathrm{e}^{0,3t}$ **d.** $g(t) = 10 + \mathrm{e}^{-0,3t}$

B. Étude statistique

On cherche à évaluer l'effet d'un pesticide que l'on peut trouver dans les rivières, sur la diminution de la fertilité d'une population de poissons. Pour cela un laboratoire va disposer huit aquariums, contenant chacun dix poissons de la même espèce et de l'eau avec différentes quantités de ce pesticide. Au bout d'un mois on relève le nombre total d'œufs pondus par les poissons des différents aquariums et on obtient les résultats suivants :

Numéro de l'aquarium	1	2	3	4	5	6	7	8
Concentration en pesticide (en mg/l) (x_i)	0	1	4	5	6	7	8	10
Nombre d' œufs pondus dans le mois (N_i)	249	248	246	230	130	50	40	35

Un ajustement affine ne semblant pas approprié, on effectue le changement de variable :

$$y = -\ln\left(\frac{250}{N} - 1\right).$$

1. Compléter le tableau en annexe à rendre avec la copie. On arrondira les résultats à 10^{-3}.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Arrondir à 10^{-3}. Interpréter le résultat.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = ax + b$.
   On arrondira a et b à 10^{-3}
4. On note $N(x)$ la fonction modélisant le nombre d'œufs pondus dans un aquarium en un mois, en fonction de la concentration x en pesticide (en mg/l).
   a. En s'aidant du changement de variables $y = -\ln\left(\dfrac{250}{N} - 1\right)$, vérifier que $N(x)$ est solution de l'équation $\dfrac{250}{N(x)} - 1 = \mathrm{e}^{0,857x - 5,905}$.
   b. En déduire que l'expression de la fonction N est :

$$N(x) = \frac{250}{1 + \mathrm{e}^{0,857x - 5,905}}.$$

C. Étude de la fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{250}{1 + 0,003\,\mathrm{e}^{0,9x}}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a. Vérifier que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-0,675\,\mathrm{e}^{0,9x}}{\left(1 + 0,003\,\mathrm{e}^{0,9x}\right)^2}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative de la fonction f.

Pour la suite, on admet que la fonction f modélise le nombre d'œufs pondus par mois dans un aquarium, en fonction de la concentration x en pesticide (en mg/l) sur l'intervalle $[0; 50)$.

4. La concentration efficace médiane notée CE50 est la concentration qui correspond à une diminution de 50 % du nombre d'œufs pondus par mois par rapport à une eau sans pesticide.
   Déterminer cette concentration CE50 à 10^{-1} près. Expliquer votre démarche.
5. Une primitive F de f est calculée par un logiciel de calcul formel :

$$F(x) = -\frac{2\,500}{9} \ln\left(\mathrm{e}^{-0,9x} + 0,003\right).$$

   Estimer, à l'unité près, le nombre moyen d'œufs pondus par mois, pour des concentrations en pesticide comprises entre 4 et 6 mg/l.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2 : **8 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

A. Étude du taux d'hémoglobine chez la femme en France

L'anémie se définit par un taux d'hémoglobine dans le sang inférieur aux valeurs normales. Une femme est en anémie lorsque son taux d'hémoglobine est inférieur ou égal à 12 g/dl.

Une femme est en polyglobulie si son taux d'hémoglobine est supérieur ou égal à 16 g/dl.
Soit T la variable aléatoire qui, à chaque femme de la population française, associe son taux d'hémoglobine en grammes par décilitre (g/dl). On admet que T suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 1,15$.

1. Déterminer la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans la population française soit en anémie. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. En déduire, sans utiliser la calculatrice, la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans la population française soit en polyglobulie. Expliquer votre démarche. On pourra s'aider d'un schéma.

B. Prévisions d'erreurs d'analyses

Un laboratoire procède à 300 analyses de taux d'hémoglobine chaque mois. On suppose que la probabilité qu'une analyse soit erronée est 0,005.
On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 300 analyses, associe le nombre d'analyses erronées de cet échantillon. On suppose que la constitution d'un tel échantillon peut être assimilée à un tirage avec remise de 300 analyses.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? En préciser les paramètres.
2. Un tableur fournit les résultats suivants :
   En utilisant cet extrait, déterminer en arrondissant les valeurs demandées à 10^{-2} :
   a. la probabilité qu'aucune des 300 analyses de l'échantillon ne soit erronée.
   b. $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1	k	$P(X = k)$
2	0	0,222 292 2
3	1	0,335 113 869
4	2	0,251 756 399
5	3	0,125 667 348
6	4	0,046 888 445
7	5	0,013 948 723
8	6	0,003 445 29
9	7	0,000 727 358
10	8	0,000 133 867
11	9	2, 18253E-05

C. Délai des résultats des analyses du taux d'hémoglobine

Un laboratoire qui pratique des analyses affirme que le délai moyen pour fournir les résultats d'une analyse du taux d'hémoglobine est de 60 minutes.
On souhaite tester cette hypothèse à l'aide d'un test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.
On note m le délai moyen pour fournir le résultat d'une analyse et on définit les hypothèses nulle et alternative suivantes :
H_0 « $m = 60$ » et H_1 « $m \neq 60$ ».
Soit $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 analyses associe le délai moyen pour fournir les résultats de ces analyses.
On admet que $\overline{Y}$ suit la loi normale d'espérance m et d'écart type 1,5.
Donc sous l'hypothèse « H_0 est vraie », $\overline{Y}$ suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart type 1,5.

1. Déterminer l'arrondi au centième du nombre réel h vérifiant $P(60 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 60 + h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. On prélève un échantillon de 100 analyses et on trouve un délai moyen pour fournir les résultats de $\overline{Y} = 62,5$ minutes. Que peut-on en conclure ?

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1 - Partie A - Question 1

Concentration en pesticide (en mg/l) (x_i)	0	1	4	5	6	7	8	10
Nombre d' œufs pondus dans le mois (N_i)	249	248	246	230	130	50	40	35
$y_i = -\ln\left(\dfrac{250}{N_i} - 1\right)$	5,52				0,08			

Exercice 1 - Partie C - Question 3