

Brevet de technicien supérieur session 4 novembre 2019

Groupement A – Nouvelle Calédonie

A. P. M. E. P.

Spécialités :

- Électrotechnique
- Systèmes phoniques
- Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1

3 points

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

Une usine produit des bobines électriques.

- 3 % des bobines produites sont défectueuses. On constitue un échantillon de 100 bobines prises au hasard dans la production. Cette production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bobines.
On modélise le nombre de bobines défectueuses contenues dans un échantillon de 100 bobines par une variable aléatoire X .
 - Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? On ne demande pas de justifications.
 - Quelle est la probabilité qu'un échantillon de 100 bobines contienne au plus 3 bobines défectueuses? Arrondir au centième.
- Une des chaînes de fabrication de l'usine doit répondre à une commande spécifique.
On modélise l'inductance, exprimée en henry (H) d'une bobine par une variable aléatoire Y .
On admet que Y suit la loi normale de moyenne $m = 1$ et d'écart type $\sigma = 0,02$.
Quelle est la probabilité qu'une bobine prise au hasard dans la production ait une inductance comprise entre 0,96 H et 1,04 H? Arrondir au centième.

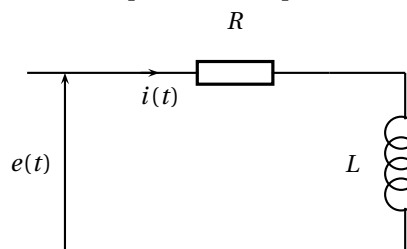
Exercice 2

11 points

On considère un circuit composé d'une résistance et d'une bobine en série.

On note :

- R la valeur de la résistance, en ohm (Ω),
- L l'inductance de la bobine en henry (H),
- $e(t)$ la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt (V), à l'instant t exprimé en seconde (s).
- $i(t)$ l'intensité dans le circuit, exprimée en ampère (A), à l'instant t (en seconde).



On rappelle que la fonction échelon unité est la fonction définie pour tout réel t par :

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour la partie A de l'exercice.

Équations différentielles	Solutions sur un intervalle I
$ay'(t) + by(t) = 0$ où a et b sont des constantes réelles, a étant non nulle.	$y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$, où k désigne une constante réelle.
Fonction	Dérivée
$t \mapsto e^{at}$, avec a constante réelle.	$t \mapsto ae^{at}$.

Partie A : Réponse échelon du circuit

Dans cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 0,2$ H et on étudie le comportement du circuit lorsqu'on applique soudainement une tension continue modélisée, pour tout réel t , par $e(t) = 10\mathcal{U}(t)$.

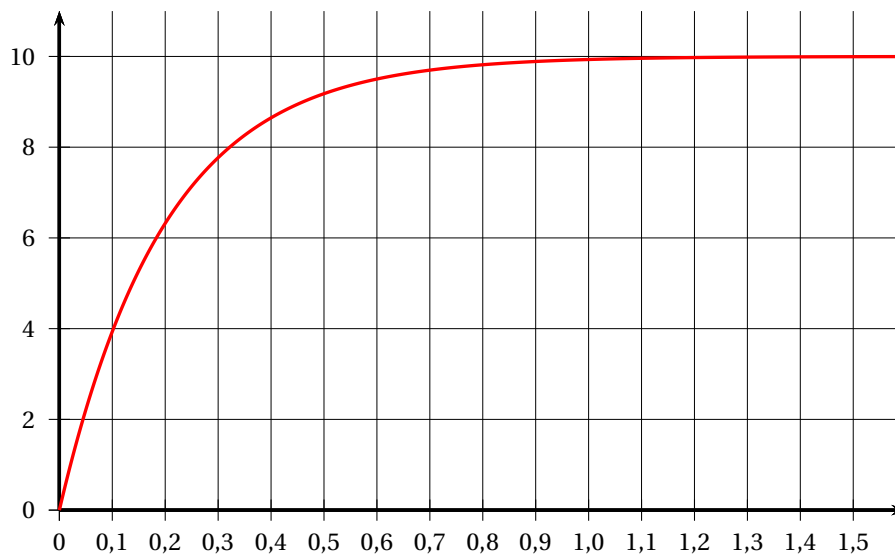
À l'instant $t = 0$ le courant dans le circuit est nul.

On admet que la fonction i est solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E): \quad Ly' + Ry = e(t)$$

d'inconnue y , où y est une fonction dérivable de la variable t .

1. Dans cette question, on cherche une expression de $i(t)$ pour $t \in [0; +\infty[$.
 - a. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): 0,2y' + y = 0$.
 - b. Déterminer une fonction constante $g: t \mapsto c$, avec c constante réelle, solution de l'équation différentielle $(E): 0,2y' + y = 10$.
 - c. En déduire les solutions de l'équation (E) .
 - d. Justifier que pour tout réel positif ou nul $t: i(t) = 10 - 10e^{-5t}$.
2. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction i sur $[0; +\infty[$.



- a. On admet que le développement limité d'ordre 2 de la fonction i au voisinage de 0 est

$$i(t) = 50t - 125t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ où } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction i au point d'abscisse 0. Puis tracer cette tangente **sur la figure 1 du document réponse**.

- b. Déterminer graphiquement l'intensité i_s vers laquelle le courant i se stabilise dans le circuit et l'abscisse τ du point de la tangente T dont l'ordonnée vaut i_s .
Cette valeur τ est une constante de temps caractéristique du circuit. On considère qu'à 5τ le circuit est passé du régime transitoire au régime permanent.

3. On note $u_L(t)$ la tension aux bornes de la bobine exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).

On admet que pour tout réel $t \geq 0$: $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$ ou encore $u_L(t) = Li'(t)$.

Calculer $u_L(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

4. L'énergie, exprimée en joule (J), stockée par la bobine pendant la phase transitoire est donnée par $E_L = \int_0^1 u_L(t) i(t) dt$.

On admet que : $E_L = 100 \int_0^1 (e^{-5t} - e^{-10t}) dt$.

Calculer la valeur exacte de E_L puis donner sa valeur arrondie à 10^{-2} .

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour la partie B de l'exercice

Fonction causale	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \frac{1}{p} e^{-ap}$
$t \mapsto e^{-at} \mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \frac{1}{p+a}$
f étant une fonction causale et F sa transformée de Laplace, on a aussi :	
$t \mapsto f(t) \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t-\alpha) \mathcal{U}(t-\alpha)$, avec α constante réelle	$p \mapsto F(p) e^{-\alpha p}$
$t \mapsto f'(t) \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f(0^+)$

Partie B : Réponse impulsionnelle du circuit

Dans cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 1H$ et la tension e aux bornes du circuit est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$e(t) = 20U(t) - 20U(t-10).$$

On note $s(t)$ la tension aux bornes de la résistance, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).

On admet que $s(0) = 0$ et que $\frac{L}{R} s'(t) + s(t) = e(t)$.

On note respectivement S et E les transformées de Laplace des fonctions s et e .

- Tracer la courbe représentative de la fonction e sur la figure 2 du document réponse sur laquelle est déjà représentée la fonction s .
- Déterminer $E(p)$.
- En appliquant la transformation de Laplace à l'égalité vérifiée par s et e , montrer que

$$S(p) = \frac{20}{p(p+1)} (1 - e^{-10p})$$

4. Détermination de $s(t)$ en fonction de t

a. Vérifier que : $\frac{20}{p(p+1)} = \frac{20}{p} - \frac{20}{p+1}$.

b. Donner les originaux de $p \rightarrow \frac{20}{p}$, $p \rightarrow \frac{20}{p+1}$, $p \rightarrow \frac{20}{p} e^{-10p}$ et $p \rightarrow \frac{20}{p+1} e^{-10p}$.

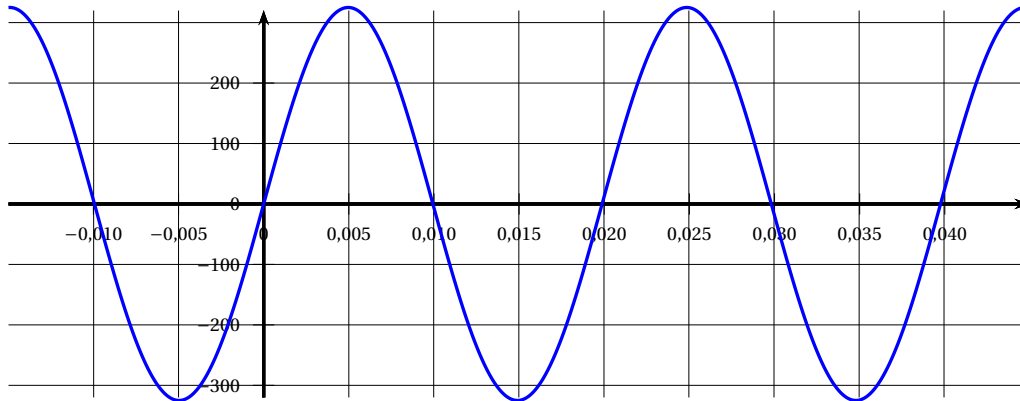
c. En déduire $s(t)$

d. Vérifier que pour $t \in [10; +\infty[$, $s(t) = 20(e^{10} - 1)e^{-t}$.

On peut remarquer que « la réponse suit l'entrée », mais avec un certain retard. Ce délai est dû à la bobine, un composant qui emmagasine de l'énergie.

EXERCICE 3 (6 points)

Dans cet exercice on compare le redressement mono-alternance et le redressement double-alternance d'une tension alternative monophasée sinusoïdale $u(t)$ de fréquence 50 hertz (Hz), représentée ci-dessous et donnée par : $u(t) = 325 \sin(100\pi t)$ pour tout réel t .



On rappelle que

- lorsque une fonction périodique f de période T et fréquence F , est développable en série de Fourier et que l'on note S son développement en série de Fourier, on a :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$,

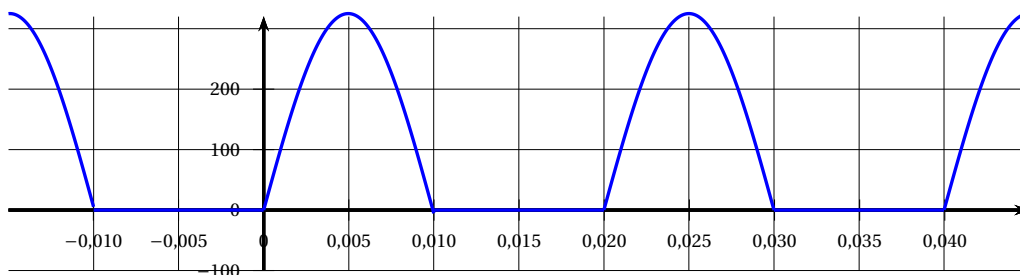
et, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$.

- l'amplitude de la composante continue du développement est $A_0 = |a_0|$.
- pour $n \geq 1$ l'harmonique de rang n a pour fréquence $\frac{n\omega}{2\pi}$, soit nF , et pour amplitude

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Partie A : Redressement mono-alternance

Avec un redresseur mono-alternance on obtient, à partir de $u(t)$, la tension $u_1(t)$ représentée ci-dessous.



On a $u_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0,01 \\ 0 & \text{si } 0,01 \leq t \leq 0,02 \end{cases}$

1. On admet que la fonction u_1 est périodique. Déterminer graphiquement sa période T .
2. Calculer la valeur moyenne a_0 de la fonction u_1 . Écrire sur la copie les étapes du calcul.

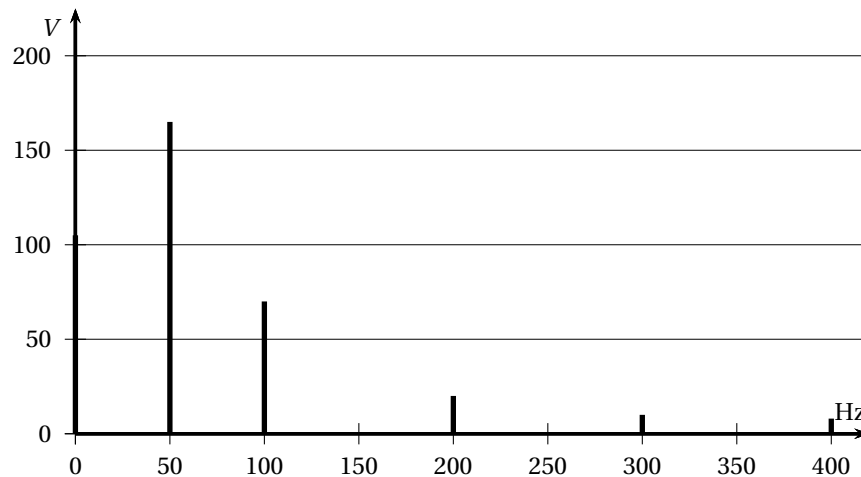
3. On admet que la fonction u_1 est développable en série de Fourier et que son développement en série de Fourier est :

$$S_1(t) = \frac{325}{\pi} + \frac{325}{2} \sin(100\pi t) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cos(100n\pi t)$$

avec, pour $n \geq 1$, $a_n = 0$ si n est impair et $a_n = \frac{-650}{\pi(n^2 - 1)}$ si n est pair.

Compléter le **tableau 1 du document-réponse** dans lequel figurent les valeurs, arrondies à 10^{-1} , des coefficients de Fourier a_n et b_n associés à la fonction u_1 et des amplitudes A_n de sa composante continue et de ses harmoniques.

À partir de ce tableau, on obtient le spectre du signal u_1 :



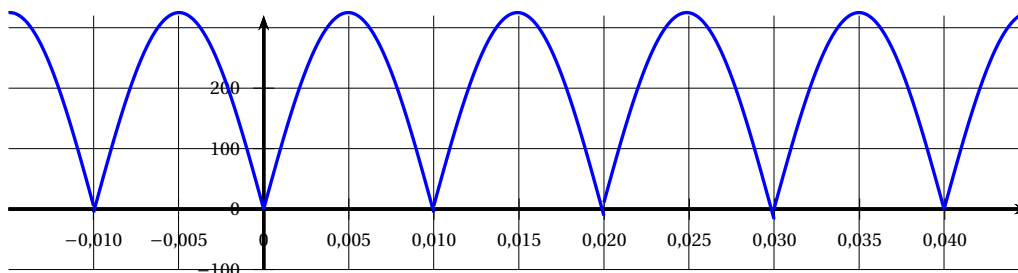
4. On note $u_{1,e}$ la valeur efficace de la tension u_1 exprimée en volt.
On rappelle que, d'après la formule de Parseval, on a

$$u_{1,e}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Déduire du **tableau 1** une valeur approchée de $u_{1,e}^2$, puis une valeur approchée de $u_{1,e}$ arrondie à l'unité.

Partie B : Comparaison avec le redressement double-alternance

Avec un redresseur double-alternance on obtient à partir de $u(t)$, la tension $u_2(t)$ représentée par la courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées partiellement donnée ci-dessous.



On a : $u_2(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0,01 \\ -u(t) & \text{si } 0,01 \leq t \leq 0,02 \end{cases}$

On admet que la fonction u_2 est périodique de période $T_2 = 0,01$.

On admet aussi que la fonction u_2 est développable en série de Fourier et a pour développement :

$$S_2(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(n\omega t) + b'_n \sin(n\omega t)), \text{ avec } a'_0 = \frac{650}{\pi}.$$

1. Coefficients de Fourier de la fonction u_2

- a. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $b'_n = 0$.
- b. À l'aide d'une calculatrice formelle, on a obtenu le résultat suivant :

$$\int_0^{0,01} 325 \sin(100\pi t) \cos(200\pi t) dt = \frac{-65}{10\pi(4n^2 - 1)}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $a'_n = \frac{-1300}{\pi(4n^2 - 1)}.$

2. On donne, dans le **tableau 2** figurant dans le document réponse, les valeurs de a'_n et A'_n arrondies à l'unité.

À l'aide de ces valeurs, représenter sur **la figure 3** du document réponse, les harmoniques de rang $n = 1$ et $n = 2$ associés respectivement aux fréquences 100 Hz et 200 Hz.

3. Comparaison du redressement mono-alternance et du redressement double-alternance

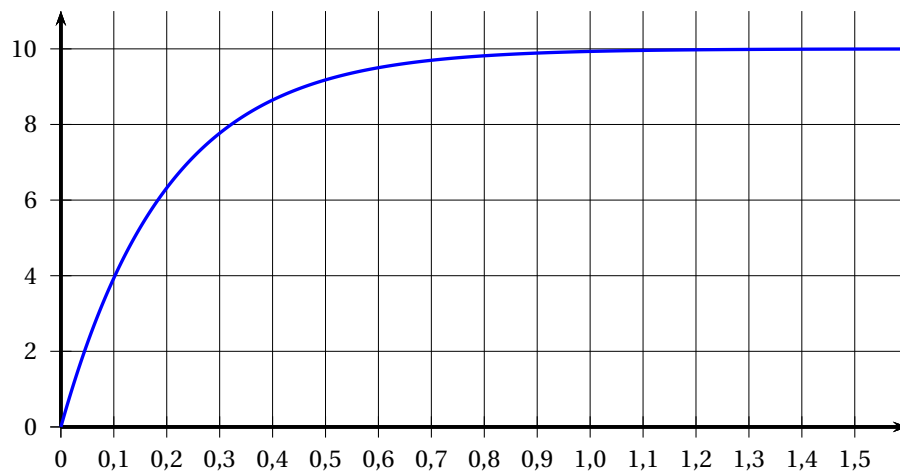
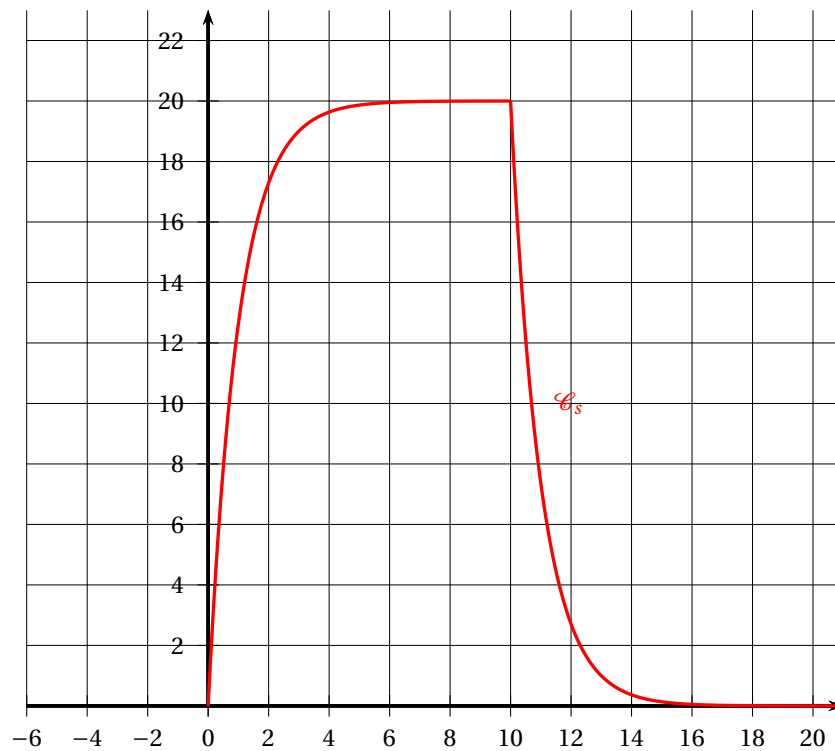
- a. On admet que la valeur efficace $u_{2,e}$ de la tension u_2 exprimée en volt. vaut environ 230 V.

En calculant $\frac{a_0^2}{u_{1,e}^2}$ et $\frac{a_0'^2}{u_{2,e}^2}$, déterminer dans quel redressement la part de la composante continue est la plus importante.

- b. Une fréquence du fondamental (harmonique de rang 1) élevée sera plus facilement éliminée par un traitement ultérieur. Quel est le type de redressement qui facilitera ce traitement ?

Justifier.

DOCUMENT REPONSE à rendre avec la copie

Exercice 2 - A- 2. a. - Figure 1 – Courbe représentative de i Exercice 2 - B-1. – Figure 2 – Courbes représentatives des fonctions e et s .

Exercice 3 - A-3. - Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de a_n arrondie à 10^{-1}			-69,0			0			-3,3
Valeur de b_n arrondie à 10^{-1}			0	0	0	0	0	0	0
Valeur de A_n arrondie à 10^{-1}		162,5		0					

Exercice 3 - B-2**Tableau 2**

n	0	1	2	3	4
Valeur de a'_n arrondie à l'unité	207	-138	-28	-12	-7
Valeur de A'_n arrondie à l'unité	207	138	28	12	7

Figure 3 - Spectre de la tension u_2 