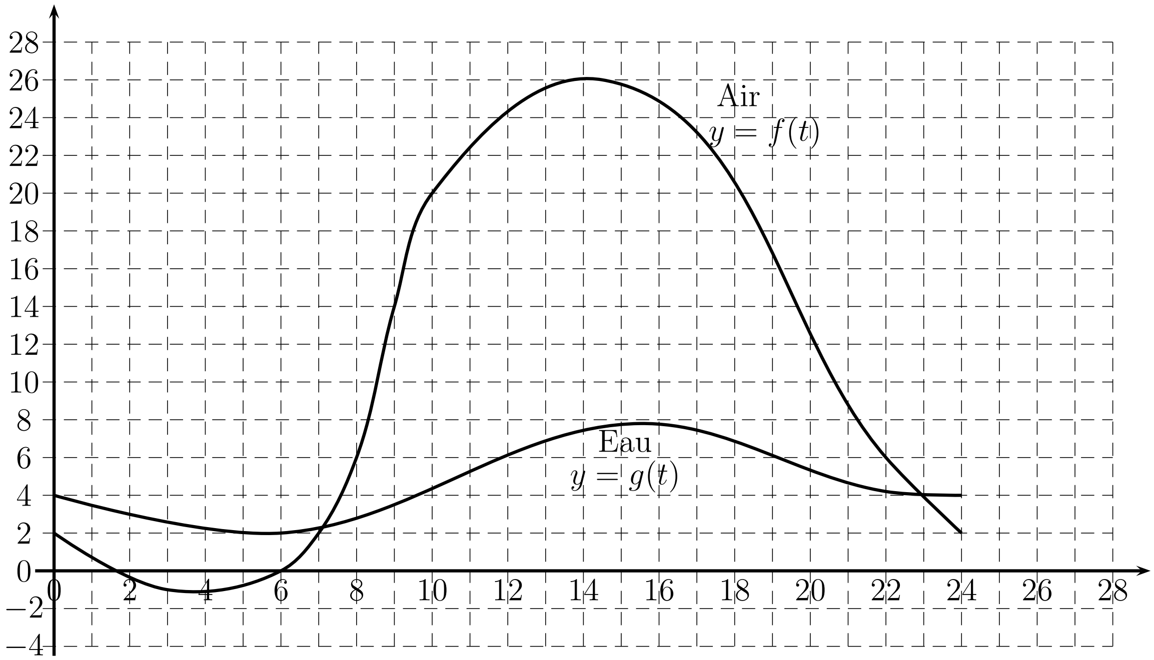
Généralités sur les fonctions - Exercices 2^{nde}

1 - Relevé de températures : courbes et fonctions Voici les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.



On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable t.

1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

	Langage mathématique	Langage courant
a.	$f(17) = 24$	A 17 h, la température de l'air était de 24° C.
b.	L'image de 6 par g est 2.	A 6 h, la température ...
c.	Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure ... ?
d.	Le maximum de la fonction f est 26	
e.	Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$.	Entre 1 h et 6 h ...
f.	$f(7) = g(7)$	A 7 h, ...
g.	Résoudre $f(t) = g(t)$.	
h.	f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

2. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :

	Langage courant	Langage mathématique
a.	A minuit, la température de l'eau était de 4° C.	
b.	A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4° C ?	
c.	A 8 h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
d.	A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
e.	La température minimale de l'eau est de 2° C.	
f.	Entre 6 h et 15 h, la température de l'eau monte.	

2 - Programme de calcul : définition algébrique d'une fonction

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre entier naturel	10	5	n
Multiplier par 2 Ajouter 1 Elever au carré Soustraire 1 Multiplier par 3			
Résultat	1320		

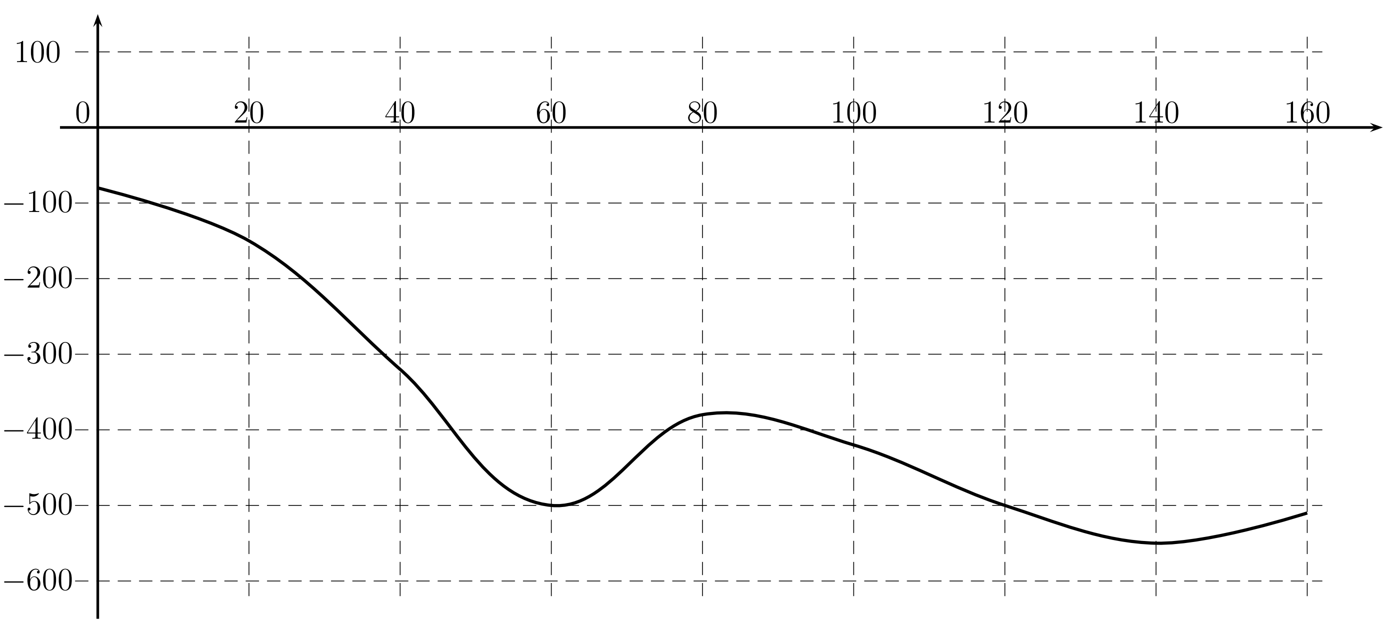
1. Compléter le tableau et montrer que le résultat, pour un nombre réel x quelconque est $12x^2+12x$.
2. On a ainsi défini la fonction f par l'expression algébrique : $f(x) = \quad \ldots$ __________
3. Quel est le résultat du programme si on introduit le nombre 15 ? le nombre $3,5$?
4. Quel nombre peut-on introduire de façon à ce que le résultat du programme soit nul ?

3 - Une fonction et sa courbe

A l'aide d'un sonar, un navire sonde le fond marin. Pour cela, il se déplace en suivant une ligne droite d à partir d'un point d'origine et il émet des salves d'ultrasons.

Il mesure le temps qui s'écoule avant de recevoir l'écho des ultrasons et en déduit la profondeur $h(x)$ de la mer sous le point situé à la distance x de son point d'origine.

Le relevé est donné par le graphique suivant :



1. Donner un titre, utilisant le terme fonction, au graphique, et à ces axes.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
3. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 50 ? d'abscisse 120 ?
4. Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée -200 ? d'ordonnée -400 ? d'ordonnée -500 ?
5. Quels sont les extréma de le fonction h ?

4 - A propos des fonctions : éléments caractéristiques d'une fonction

On dispose au sujet d'une fonction numérique f des renseignements suivants :

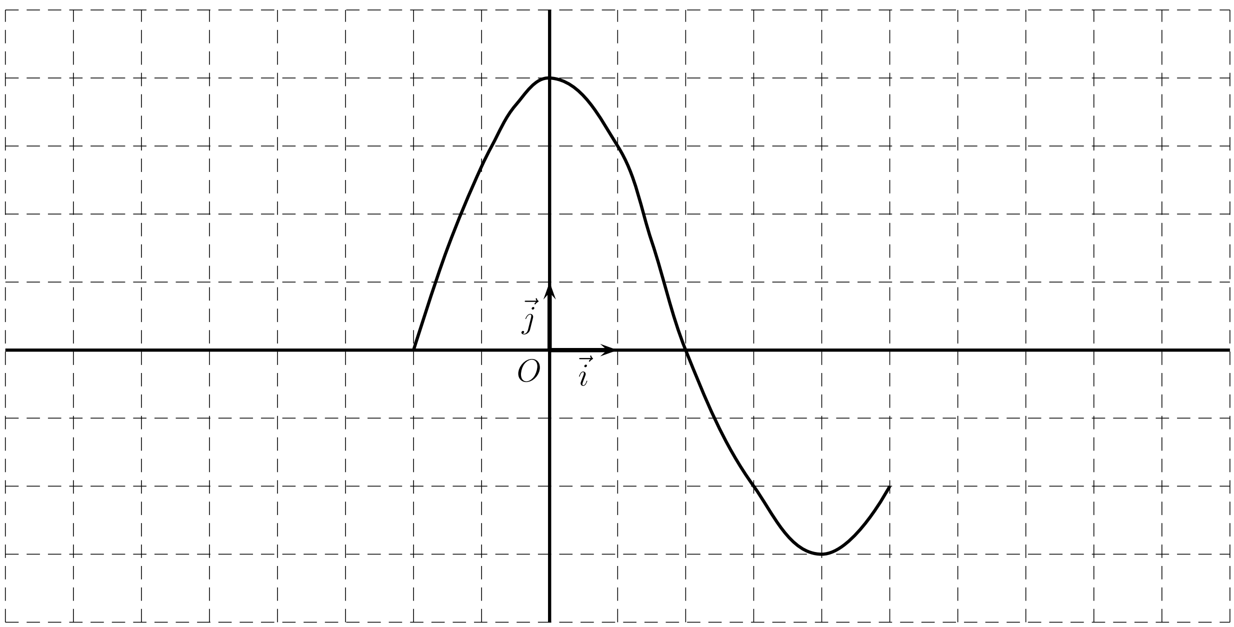
- L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = [-2; 9]$
- Un tableau de valeurs de f est :

x	-2	-1.5	-1	0	1	2	3	4	5	$5{,}5$	$8{,}5$
$f(x)$	0	$1{,}5$	$2{,}7$	4	3	0	-2	-3	-2	$-1,5$	-2

- Le tableau de variations de f :

x	-2		0		4		7		9
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3

- On sait d'autre part que la représentation graphique de f, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est une courbe que l'on peut tracer sans lever le crayon, et dont on fournit l'extrait suivant :



1. Compléter le tableau suivant :

	valeur trouvée	exacte ou approchée	renseignement(s) utilisé(s)
$f(-1)$			
$f(-0,5)$			
$f(7)$			
$f(6)$			
$f(8)$			
$f(-2,5)$			

2. Résoudre les équations proposées, en remplissant le tableau comme précédemment :

	valeur(s) trouvée(s)	exacte(s) ou approchée(s)	renseignement(s) utilisé(s)
$f(x) = 3$			
$f(x) = -0,5$			
$f(x) = -1$			
$f(x) = -2$			
$f(x) = -2,5$			
$f(x) = 5$			

Généralités sur les fonctions - Exercices 2^{nde}

• Généralités et vocabulaire des fonctions

Exercice 1 On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :
- son ensemble de définition est $D = [-5; 4]$;
- les nombres -4 et 4 ont la même image 3 ;
- les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;
- le nombre -5 est un antécédent de 0 par f ;
- $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0,5$.

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

• Courbe représentative d'une fonction

Exercice 2 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = -3x + 2$.

1. Dire si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   $A(1; -1)$ $B(-3; 11)$ $C(2; 4)$ $D(-5; 17)$ $E(-2; -8)$ $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.
3. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

1. Dire si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   $A(1; 2)$ $B(-3; 34)$ $C(2; 4)$ $D(5; 66)$ $E(-2; 16)$ $F\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$
2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

2. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Donner, à partir de ce graphique, le tableau de variation de la fonction f.
   Quel est le minimum de la fonction f ?
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice, et chercher alors une valeur plus précise pour ce minimum.

• Sens de variation des fonctions

Exercice 5 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = -3x + 2$.
Déterminer le sens de variation de f, puis donner son tableau de variation.

Exercice 6 Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = 3x^2 - 2$.
Déterminer le sens de variation de g sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.
Donner alors le tableau de variation de la fonction g.

Exercice 7 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = (x-2)^2+3$.

1. Etudier le sens de variation de g sur les intervalles $[-10;2]$ et $[2;10]$.
   Donner le tableau de variation de g.
2. Déterminer le minimum de g.

Exercice 8 Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[4;13]$ par l'expression $\dfrac{1}{x-3}$.
Déterminer le sens de variation de h, puis donner le maximum et le minimum de h.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$.

1. Etudier les sens de variation de f sur les intervalles $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.
2. Donner alors les maxima ou minima éventuels de f.

• Ensemble de définition d'une fonction - Tableaux de signes

Exercice 10 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-9}$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x}$; $j : x \mapsto \dfrac{1}{(x-3)(x+7)}$

$k : x \mapsto \sqrt{x-2}$; $l : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$; $m : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)}$

Exercice 11 Déterminer le signe des expressions suivantes :

$A(x) = (x-5)(x-12)$

$B(x) = (x-3)(2x+5)$

$C(x) = (x+6)(2x-8)(3x-9)$

$D(x) = (x-3)(-2x+6)$

$E(x) = \dfrac{x+6}{2x-16}$

$F(x) = \dfrac{2x-3}{-2x+6}$

$G(x) = (2x+3)(x-5) - (3x+5)(x-5)$

$H(x) = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{x-3}$

Exercice 12 Résoudre les inéquations suivantes :

(I_1) : $-3x+2 < 2x+3$

(I_2) : $(3x-1)(x+2) \leqslant x(x+2)$

(I_3) : $2x^2 > 3x$

(I_4) : $\dfrac{1}{4x-3} \leqslant \dfrac{2}{3x-4}$

(I_5) : $\dfrac{2}{x+3} \geqslant 4$

Exercice 13 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions :

$f(x) = \sqrt{(x-3)(-x+2)}$; $g(x) = \sqrt{(x-3)(-x+2) + (x-3)(-4x+3)}$; $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)(2x-1)}$

• Quelques fonctions mises en situation

Exercice 14 Dans une entreprise, pour x objets produits et vendus, le bénéfice est de :

$$B(x) = -2x^2 - 500x + 70\,000\,.$$

1. Montrer que pour tout x réel, $B(x) = (2x+700)(-x+100)$.

2. Pour quels nombres d'objets x, l'entreprise est-elle rentable ?

Exercice 15 Dans une entreprise, la recette, en euros, obtenu pour la vente journalière de x objets est donnée par la fonction f définie sur $[0; 50]$ par l'expression :

$$f(x) = -x^2 + 52x - 480\,.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 50]$, $\quad f(x) = -(x-26)^2 + 196$.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[0; 26]$ puis sur $[26; 50]$.

c) En déduire le bénéfice maximum que l'entreprise peut réaliser et la quantité d'objets à vendre pour l'atteindre.

Exercice 16 Un projectile est lancé en l'air à un instant initial de date $t = 0$.
On établit que son altitude (en mètres) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 4t + 1$.

1. a) A quelle altitude le projectile a-t-il été lancé ?
   b) Quelle est l'altitude du projectile après une demie seconde ?
2. a) Montrer que pour tout nombre réel t, $h(t) = -(t-1)(5t+1)$
   b) En déduire à quel instant le projectile touchera le sol.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel t, $h(t) = -5\left(t - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}$.
   b) A l'aide de l'expression précédente, étudier les variation de h sur $\left]-\infty; \dfrac{4}{5}\right]$ et sur $\left[\dfrac{4}{5}; +\infty\right[$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction h.
   c) Déduire de ce qui précède la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Exercice 17 **Choisir une forme adaptée**
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 5]$ par : $f(x) = (3x-5)^2 - 4x^2$.

1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) Développer l'expression de $f(x)$.
2. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Quelle est l'ordonnée du point C de la courbe représentative de f qui a pour abscisse $\sqrt{2}$?
   b) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les axes du repère ?
   c) résoudre l'équation $f(x) = 25$.

• Fonctions affines

Exercice 18 Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -2x + 3$.

Exercice 19 Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x + 1$.
Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Exercice 20 On considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = -2x-2$ et $y = x+2$.
Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites.