

2. Etude de fonctions

Les fonctions seront utilisées fréquemment, notamment pour modéliser des phénomènes continus.

2.1 Domaine de définition

Définition 1.1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels.

On notera :

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de f .



Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.

Dans le cas où la fonction n'est connue que par l'écriture de $f(x)$, on sous-entend que *le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.*

Exercice: Recherche d'un domaine de définition

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ (l'expression sous le radical doit être positive et le dénominateur doit être non nul). Considérons le polynôme $x^2 - 4$. Ce polynôme admet deux racines : -2 et 2 . On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines. Ici, $a = 1$ donc $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. On peut donc conclure que le domaine de définition de f est : $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

2.2 Propriétés graphiques d'une fonction

On se place dans un repère **orthonormal** du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble I .

L'ensemble des points M de coordonnées $M(x; f(x))$, $x \in I$, est appelé **courbe représentative** de f ou **graphe** de f .

La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

Exemple : Représentation graphique de la fonction « Partie entière »

La fonction partie entière, notée E , est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$ pour tout x tel que $n \leq x < n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, on a : $E(0) = 0$; $E(0,5) = 0$ et $E(1) = 1$.

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

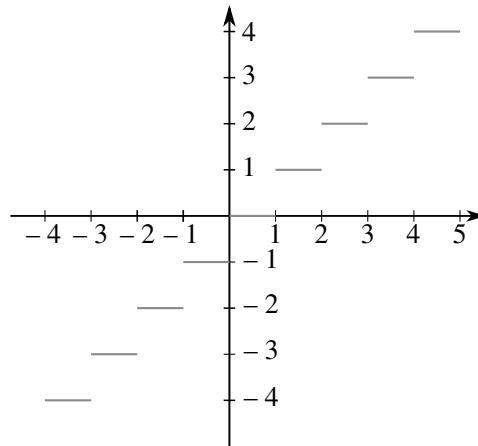


Figure 1.1 Représentation de la fonction « Partie entière »

2.3 Parité d'une fonction

Définition 1.3

Un ensemble D de $\mathbb{R}$ est centré en 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.

Définition 1.4

Soit f une fonction dont le domaine de définition D est centré en 0.

La fonction est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

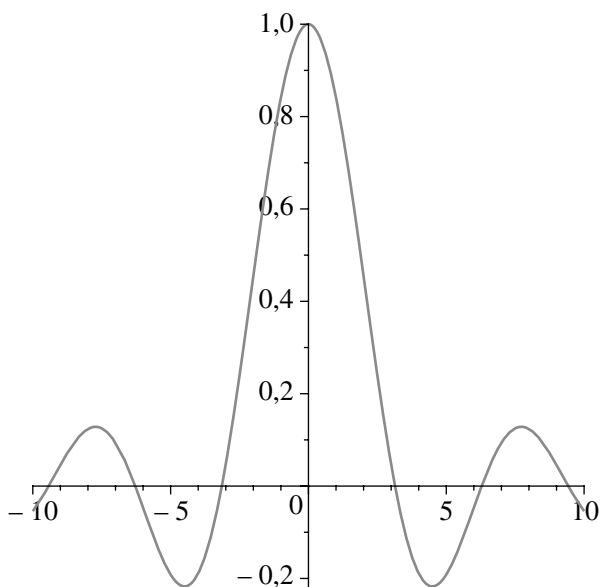


Figure 1.2 Courbe représentant une fonction paire

Définition 1.5

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition D est centré en 0.

La fonction f est dite **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Dans ce cas, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'origine O** du repère.

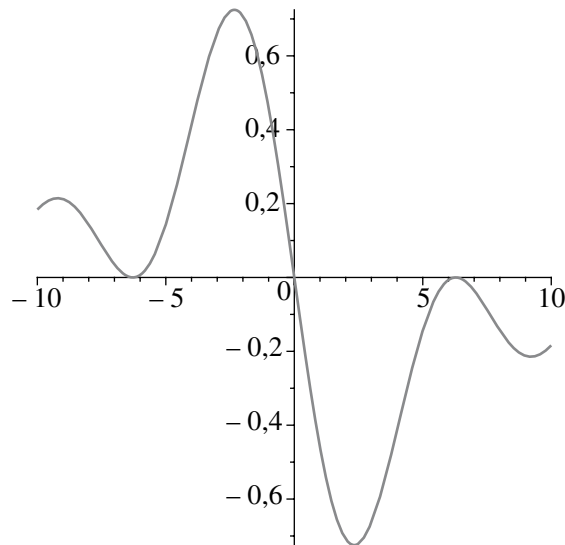


Figure 1.3 Courbe représentant une fonction impaire



- Si f est une fonction impaire définie en 0, alors $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- Pour l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude.

2.4 Périodicité

Définition 1.6

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

La fonction f sera dite périodique de période T si T est le plus petit réel positif tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.

2.5 Fonctions usuelles

La fonction logarithme népérien

La fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$ et vérifie $\ln 1 = 0$.

À retenir

$\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et on a :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ et $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n , on a : $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

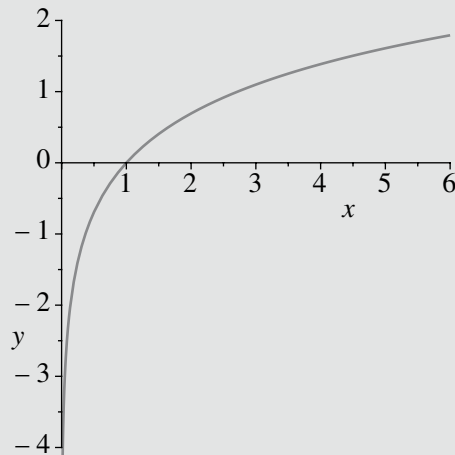


Figure 1.12 Courbe représentative de la fonction $\ln$

Fonctions exponentielles

Définition 1.7

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est la fonction réciproque¹ de la fonction $\ln$.

Conséquences

$\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$ et $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$. En particulier, $e^0 = 1$.

$\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad e^a > e^b \Leftrightarrow a > b.$$

1. Pour plus de détails, voir la partie sur les fonctions réciproques.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b , on a : $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^b = e^{ab}$.

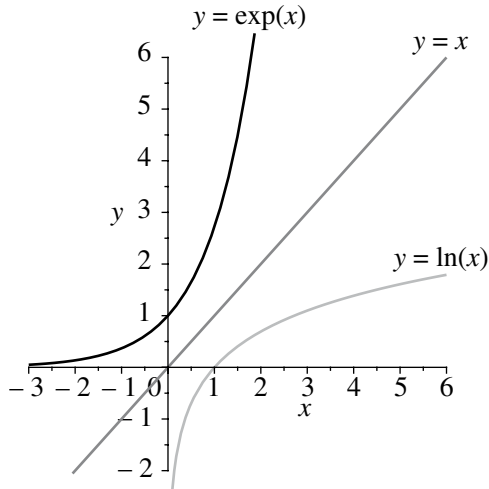


Figure 1.13

Définition 1.8

Soit a un réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$, la fonction définie par $\exp_a(x) = a^x$.

À retenir

Pour tout x réel, $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$.

$\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.

Exercice

Résolvez, dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{10x} - 3e^{5x} + 2 = 0$.

Solution

$$e^{10x} - 3e^{5x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (e^{5x})^2 - 3e^{5x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{5x} \\ X^2 - 3X + 2 = 0 \end{cases}$$

Le trinôme $X^2 - 3X + 2$ admet deux racines distinctes : -2 et 1 .

On a donc : $e^{10x} - 3e^{5x} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{5x} = -2$ ou $e^{5x} = 1$.

Or, $e^{5x} = -2$ n'admet pas de solution et $e^{5x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

0 est donc l'unique solution de cette équation.

2.6 Limites de fonctions

Limites à droite et à gauche

Définition 1.9

Soit a un réel, l étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

On définit une limite à droite de a en imposant la contrainte $x > a$.

On notera alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

On définit de même une limite à gauche de a en imposant la contrainte $x < a$.



Une fonction f admet une limite en a si, et seulement si, elle admet des limites à droite et à gauche et à que celles-ci sont égales.

Exemple

Considérons la fonction « Partie entière ».

$\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0$. La fonction E n'admet pas de limite en 1.

Limites des fonctions usuelles

Propriété 1.10 : limites de la fonction logarithme népérien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Propriété 1.11 : limites de la fonction exponentielle

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Propriété 1.12 : limites des fonctions exponentielles de base a

Si $a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

Si $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

Propriété 1.13 : limites des fonctions Puissance

Si $\alpha > 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0.$$

Si $\alpha < 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty.$$

Opérations sur les limites

Théorème: limites d'une somme de deux fonctions

Soient l_1 et l_2 deux réels, f et g étant deux fonctions dont on considère les limites en un nombre réel a , en $+\infty$ ou $-\infty$. On a :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim (f + g)$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Théorème: limites d'un produit de deux fonctions

Soient l_1 et l_2 deux réels, f et g étant deux fonctions dont on considère les limites en un nombre réel a , en $+\infty$ ou $-\infty$. On a :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim (f \times g)$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
$l_1 \neq 0$	$\pm \infty$	$\pm \infty^{(1)}$
0	$\pm \infty$	Forme indéterminée
$\pm \infty$	$\pm \infty$	$\pm \infty^{(1)}$

(1) Avec le respect de la règle des signes.

Théorème: limites de l'inverse d'une fonction

Soient l_1 un réel et f une fonction dont on considère la limite en un nombre réel a , en $+\infty$ ou $-\infty$. On a :

$\lim f$	$\lim \frac{1}{f}$
$l_1 \neq 0$	$\frac{1}{l_1}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$\pm \infty$	0

Théorème: limites d'un quotient de deux fonctions

Soient l_1 et l_2 deux réels, f et g étant deux fonctions dont on considère les limites en un nombre réel a , en $+\infty$ ou $-\infty$. On a :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
l_1	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	$\pm \infty$	0
$\pm \infty$	l_2	$\pm \infty^{(1)}$
$l_1 \neq 0$	0	$\pm \infty^{(1)}$
0	0	Forme indéterminée
$\pm \infty$	$\pm \infty$	Forme indéterminée

(1) Avec le respect de la règle des signes.

Exercice

Déterminez, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) \tan(x).$$

Solution

Ces deux limites sont associées à des formes indéterminées.

On va lever cette indétermination en utilisant, pour la première limite :

$$\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+x}^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1+x - \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)}{\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)}.$$

$\frac{-x^2}{4}$

$$\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)}.$$

$$\text{On a donc pour } x \neq 0 : \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{-1}{8}.$$

Intéressons-nous désormais à la seconde limite :

On rappelle que : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ donc

pour $\tan x \neq 0$: $(1 + \cos(2x)) \tan(x) = 2\cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x} = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(2x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) \tan(x) = 0$.



Point méthode

Pour lever des indéterminations, dans le cas de polynômes ou de quotient de polynômes, on peut utiliser les règles opératoires suivantes :

- À l'infini, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.
- À l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{-x^2 + x}$.

Pour la limite en $+\infty$, on peut écrire l'enchaînement suivant :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

Théorèmes de comparaison

Théorème: théorème des croissances comparées Soit

n un entier naturel.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Théorème: théorème des gendarmes

Soient l un réel, f , g et h étant trois fonctions définies sur un voisinage I de a , a étant un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim_a f = \lim_a h = l$ alors $\lim_a g = l$.

Exercice

Déterminez, si elle existe, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{x + 2}$.

Solution

Au voisinage de $+\infty$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $x + 2 > 0$.

On a donc, au voisinage de $+\infty$: $\frac{3x - 1}{x + 2} \leq \frac{3x + \sin(x)}{x + 2} \leq \frac{3x + 1}{x + 2}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + a}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$ donc, d'après le théorème précédent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{x + 2} = 3.$$

Asymptotes à une courbe

Théorème

Soit f une fonction, C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, a étant un réel.

- Si $\lim_a f = \pm\infty$ alors C admet une asymptote (verticale) d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{\pm\infty} f = b$ alors C admet une asymptote (horizontale) d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à la courbe C .



Point méthode

Pour déterminer une asymptote oblique, par exemple en $+\infty$, à la courbe représentative d'une fonction f , on peut procéder ainsi :

- On cherche, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si elle est finie, on la note a .
- On cherche, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$. Si elle est finie, cette limite se note b . La droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote (oblique) à la courbe C .

Exemple

Déterminons une équation de l'asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ au voisinage de $+\infty$.

Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ donc $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

d'où $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

$$\text{pour } x > 0 : f(x) - x = \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{\sqrt{x^2 + x}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Il en résulte que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$.

2.7 CONTINUITÉ ET DÉRIVATION

2.7.1 Dérivation

Généralités

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

On note alors cette limite $f'(x_0)$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout réel x_0 appartenant à I .

La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f .

Propriété 1.14

Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 .

La courbe représentative de f admet une tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ d'équation cartésienne $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Théorème: dérivées des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Dérivée $x \mapsto$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercice

Déterminez, si elle existe, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

Solution

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ donc $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ce qui permet d'écrire que :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -2 \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2.$$

En outre, on a : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}.$

Théorème: opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On a :

- Dérivée d'une somme : $(u + v)' = u' + v'$.
- Dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.
- Dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (v ne s'annulant pas sur I).

Deuxième partie : applications de la dérivation

Théorème: variations d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .
- Si $f' < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f' > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I .

Théorème: extremum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 , alors f admet un extremum local en x_0 .



Plan d'étude d'une fonction

- Ensemble de définition
- Éventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude)
- Limites ou valeurs de la fonction aux bornes des intervalles constituant son domaine de définition
- Dérivabilité, continuité et sens de variations (signe de la dérivée)
- Représentation graphique avec recherche de branches infinies, points et tangentes remarquables

Exercice: décharge d'un condensateur

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$ avec $A < 0$, $\tau > 0$ et $A + B > 0$.

- Étudiez la fonction f et donner l'allure de sa courbe représentative.
- Déterminez l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 et de l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
- L'objectif est de déterminer la valeur du temps de montée entre 10 % et 90 % de la valeur maximale, c'est-à-dire la valeur t telle que $f(t + t_0) = 0,9B$, sachant que $f(t_0) = 0,1B$.

Montrez que : $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{9}$ et en déduire la valeur exacte de t .

Partie B

On décharge un condensateur C au travers d'une résistance R .

On rappelle que la différence de potentiel v aux bornes de C lors de la décharge est donnée par $v(t) = Ee^{\frac{-t}{RC}}$ où E est la ddp initiale.

Déterminez l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_v en un point d'abscisse x_0 ($x_0 \geq 0$) avec l'axe des abscisses.

Solution

Partie A

a. Pour tout t réel, on a : $f'(t) = \frac{-A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Par hypothèses, $A < 0$ et $\tau > 0$ donc $f' > 0$.

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = B$.

b. D'après ce qui précède, la droite d'équation $y = B$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = \frac{-A}{\tau}x + A + B$.

L'abscisse du point d'intersection de ces deux droites est solution de l'équation :

$$\frac{-A}{\tau}x + A + B = B \text{ ce qui conduit à } x = \tau.$$

c. $f(t + t_0) = 0,9B$ donc $Ae^{-\frac{t+t_0}{\tau}} = -0,1B$ et $f(t_0) = 0,1B$

donc $Ae^{-\frac{t_0}{\tau}} = -0,9B$.

$$\text{On a donc : } \frac{Ae^{-\frac{t+t_0}{\tau}}}{Ae^{-\frac{t_0}{\tau}}} = \frac{-0,1B}{-0,9B} \text{ soit } e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{9}.$$

On en déduit que : $-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ soit $t = \tau \ln 9$.

Partie B

$$v(t) = Ee^{\frac{-t}{RC}} \text{ donc } v'(t) = \frac{-E}{RC} e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Une équation de la tangente à C_v en un point d'abscisse x_0 est

$$y = \frac{-E}{RC} e^{\frac{-x_0}{RC}} (x - x_0) + Ee^{\frac{-x_0}{RC}}.$$

L'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_v en un point d'abscisse x_0 est solution de l'équation :

$$0 = \frac{-E}{RC} e^{\frac{-x_0}{RC}} (x - x_0) + Ee^{\frac{-x_0}{RC}} \text{ donc } \frac{1}{RC} (x - x_0) = 1 \text{ donc } x = x_0 + RC.$$

2.7.2 Continuité

Généralités

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Par exemple, les fonctions affines sont continues en 0, contrairement à la fonction « partie entière ».

Théorème

Les fonctions polynômes, rationnelles, exponentielles, puissances, logarithmes, trigonométriques sont toutes continues sur leur ensemble de définition.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .



La réciproque est fausse. En effet, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue mais pas dérivable en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. L'image par f de l'intervalle $[a; b]$ est un autre intervalle de la forme $[m; M]$.

Autrement dit :

si f est continue sur $[a; b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

Théorème: application aux fonctions strictement monotones

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et strictement monotone.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.



Ce théorème s'étend à des intervalles de la forme $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$ voire $\mathbb{R}$.

Exercice

Montrez que l'équation $2^x + 9^x = 85$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Solution

La fonction $x \mapsto 2^x + 9^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions du type $x \mapsto a^x$ ($a > 1$) continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x + 9^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x + 9^x = +\infty$ et $85 \in]0; +\infty[$ donc, d'après le

théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $2^x + 9^x = 85$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Enfin, $2^2 + 9^2 = 85$ donc 2 est l'unique solution de l'équation $2^x + 9^x = 85$.

2.8 GÉNÉRALITÉS SUR LE CALCUL INTÉGRAL

L'intégration est fort utile, notamment pour déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un courant ou d'une tension.

En outre, cette notion doit être parfaitement maîtrisée pour aborder sereinement des notions telles que la transformée de Laplace ou les séries de Fourier.

Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions d'une variable réelle.

2.8.1 Primitives et intégrales

Définition

F est une primitive de f sur un intervalle I si $F' = f$ sur I .

Conséquence

Si f admet une primitive F sur I alors elle admet une **infinité** de primitives G sur I et les primitives de f seront de la forme $G = F + k$ où k est une fonction constante sur I .

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$

Pour toute primitive de f , on a : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.



$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

2.8.2 Propriétés de l'intégrale

Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur I , $(a, b) \in I^-$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue I , $(a, b, c) \in I$. On a : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On a : $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

2.8.3 Applications de l'intégrale : valeurs moyenne et efficace

Dans cette partie, on considère des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T .

Définition

On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur $[0; T]$ le nombre, noté f_{moy} , défini par : $f_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$.

Exemple

Déterminons la valeur moyenne, sur une période, de $f : x \mapsto |\sin x|$.

Cette fonction est π -périodique donc on va calculer $f_{moy} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin x| dx$.

Or : $\int_0^\pi |\sin x| dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$ donc $f_{moy} = \frac{2}{\pi}$.

Définition

On appelle valeur efficace d'une fonction f sur $[0; T]$ le nombre, noté f_{eff} , défini par : $f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx}$.

Exemple

Déterminons la valeur efficace d'un signal sinusoïdal v défini par : $v(t) = V_m \sin(\omega t)$.

La fonction v est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On veut calculer $v_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt}$.

Or : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ donc $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.

On a donc : $\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{T}{2}$ car $\sin(2\omega T) = \sin(4\pi) = 0$.

Ainsi : $v_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \times \frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

Exercices

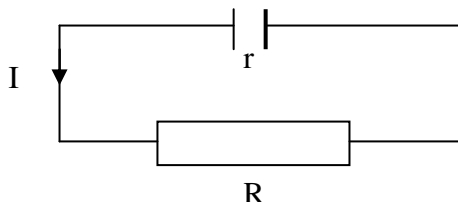
Exercice 1 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x - 1 ; f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ avec } x \neq 0 ; g(t) = \frac{t+1}{t-1} \text{ avec } t \neq 1 ; \\ h(t) &= \sqrt{t^2 + 1} ; l(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} ; X(\omega) = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 ; Z(\omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} ; \\ i(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) ; f_0(C) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} ; W(C) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} ; W(Q) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} ; \\ V(x) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right) \end{aligned}$$

Exercice 2 Etudier la parité des fonctions suivantes:

- a. $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$
- b. $f_2(x) = x^3 - x$
- c. $f_3(x) = x^3 - x^2 + 1$
- d. $f_4(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

Exercice 3 Soit un générateur de force électromotrice E , de résistance interne r et le circuit ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée y soit maximum (on trouve $P(R) = E^2 \cdot \frac{R}{(R+r)^2}$)



Exercice 4 Résoudre les inéquations suivantes:

- 1. $\frac{x-1}{x-3} \leq \frac{x-2}{x-4}$
- 2. $\begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ 3x + 2 > x + 3 \end{cases}$

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes:

1. $e^{2 \ln(x)} = 9$

2. $\ln(y + 6) - \ln(y + 2) + \ln(y + 3) = 0$

Exercice 6 Déterminer les ensembles $f(x) > 0$ pour:

a. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

b. $f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2$

c. $f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$

Exercice 7 Donner le domaine de définition et étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$$y_1 = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$y_2 = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 8

Déterminez les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x - 3) e^{-x}$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{\cos x(x)}$