

Devoir Mathématiques N° 10 (1h)



On attend une rédaction propre et soignée sur une copie double. Les réponses peuvent être en partie données sur le sujet.

0 Nom et prénom :

1 (2 points) Déterminer la fonction affine f qui satisfait $f(3) = 2$ et $f(-4) = 6$.

2 (3 points) On considère un rectangle de longueur $L = x + 1$ et de largeur $\ell = x$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche dans cet exercice à déterminer x pour que $\mathcal{A}(x) = \mathcal{P}(x)$

1. $\mathcal{A}(x) = \mathcal{P}(x) \iff x^2 - 3x - 2$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 3x - 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

3. En déduire la réponse au problème.

3 (10 points) Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques des deux fonctions dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. On a représenté ces courbes dans le repère ci-joint.

1. Etude graphique

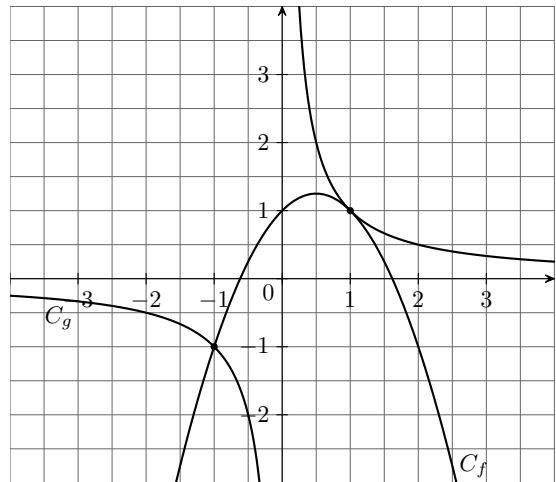
- a) Résoudre graphiquement $g(x) < 1$.
- b) Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.
- c) Déterminer avec la précision permise par le graphique le maximum de f sur \mathbb{R} .

2. Etude algébrique de la position relative de f et g

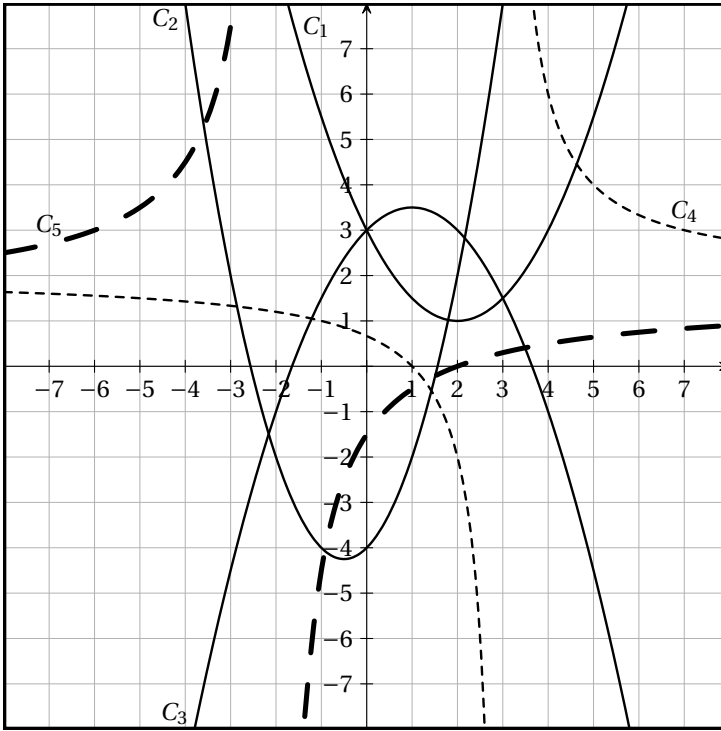
- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$g(x) - f(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{x}$$

- b) En déduire la position relative de \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f .
- c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .



4 (2 points)



On donne les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \frac{3x - 6}{2x + 4}$ pour $x \neq -2$.
3. $f_3(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \frac{-2x + 2}{3 - x}$ pour $x \neq 3$.
5. $f_5(x) = x^2 + x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Compléter les phrases suivantes par C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

1. La fonction f_1 a pour courbe représentative ...
2. La fonction f_2 a pour courbe représentative ...
3. La fonction f_3 a pour courbe représentative ...
4. La fonction f_4 a pour courbe représentative ...
5. La fonction f_5 a pour courbe représentative ...

5 (3 points) Soit f définie par $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^2$ sur \mathbb{R} .

Déterminer les variations de f sur $]0; \frac{3}{2}]$ en complétant le tableau d'enchaînement des opérations suivants et en justifiant correctement.

0	<	a	\leq	b	\leq	$\frac{3}{2}$	Justifications
		$\frac{1}{a}$		$\frac{1}{b}$			
		$2 - 3\frac{1}{a}$		$2 - 3\frac{1}{b}$			
		$\left(2 - 3\frac{1}{a}\right)^2$		$\left(2 - 3\frac{1}{b}\right)^2$			
		$f(a)$		$f(b)$			#####

Conclure : quel est le sens de variation de f .