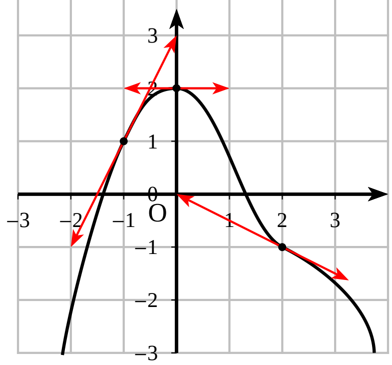
La fonction dérivée

Nombre dérivé - Interprétation graphique

EXERCICE 1

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :

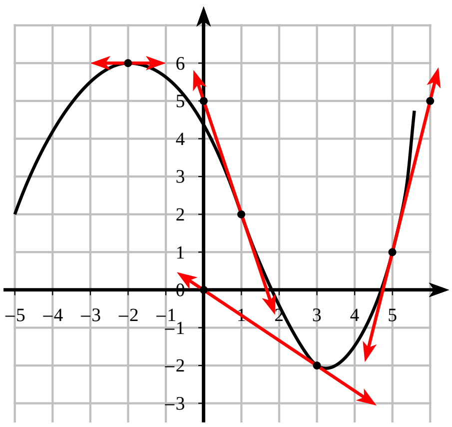
- $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
- $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.



EXERCICE 2

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :

- $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
- $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.



Calculs de dérivée

EXERCICE 3

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$
2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 1$
3) $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x - 1}{4}$
5) $f(x) = (7x - 2)^2$
6) $f(x) = x + \sin x$

EXERCICE 4

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = (x - 2)\sqrt{x}$
2) $f(x) = x \sin x$
3) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$

Exercice 5

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

2) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}$

3) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$

6) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{2x-5}$

9) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{4-x}$

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$

11) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Exercice 6

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = \sqrt{x-4}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

3) $f(x) = (-2x+3)^4$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 7

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-5}{x+1}$.

1) Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g. Que remarque t-on ?

2) Calculer $f(x) - g(x)$. Pouvait-on prévoir la remarque de la question 1)

Tangente

Exercice 8

Pour les fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 8\,; \quad a = -2$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}\,; \quad a = -1$

c) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}\,; \quad a = 1$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?

2) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$

   b) Interpréter géométriquement le résultat.

3) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

4) Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = cx + d$ (où c et d sont deux réels) ? Discuter en fonction de c.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.

b) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine O ?

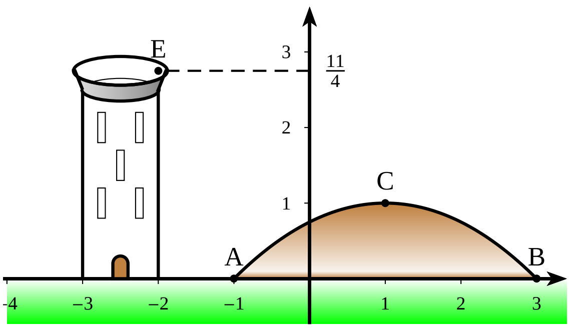
Exercice 11

Angle mort

Sur la figure ci-contre, « l'arc » de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.

Un observateur est placé en $\text{E}\left(-2\ ;\ \dfrac{11}{4}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer les point de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.



1) On note f la fonction définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer a, b, c pour que « l'arc » ABC soit la représentation de f.

2) a) Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visible de E.

   b) Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.

Sens de variation

Exercice 12

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser ensuite le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

2) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$

4) $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{9}{x-2}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x-1}$

Exercice 13

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
3) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$
4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}$
5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$
6) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2}{x-3}$
7) $f(x) = \dfrac{-3x}{1+x^2}$
8) $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}$
9) $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$

Exercice 14

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

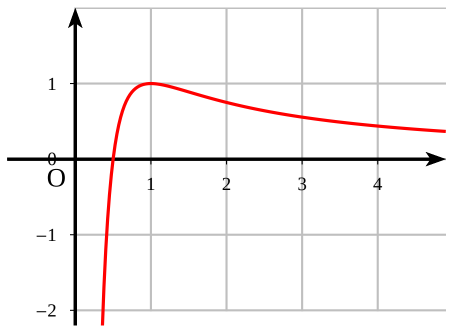
1) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$
2) $f(x) = x\sqrt{x+3}$
3) $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$
4) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$
5) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$

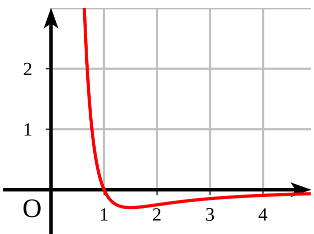
Exercice 15

Reconnaître une courbe

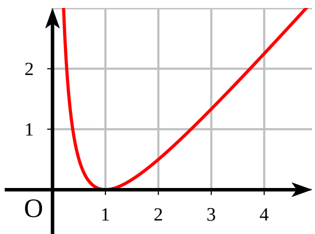
La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f.

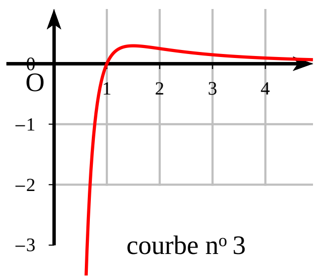




courbe n° 1



courbe n° 2



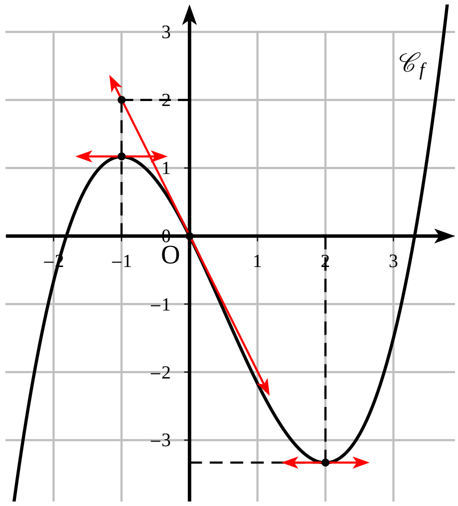
courbe n° 3

Reconnaître une fonction

EXERCICE 16

Soit une fonction f du 3[e] degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation $\mathscr{C}_f$ se trouve ci-après.
On peut donc écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1) D'après la courbe, déterminer :
   $f(0) = 0$, $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$
2) En déduire les coefficients a, b, c et d.
3) Tracer la fonction f sur votre calculatrice dans la même fenêtre pour vérifier votre solution



EXERCICE 17

On donne le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	‖	↘	-1	↗	2	↘	

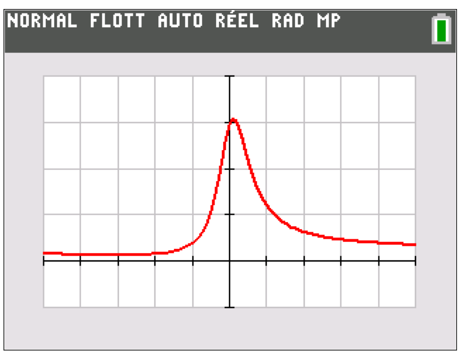
1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est celui de f' ?
2) Quels sont les extremum locaux de f ?
3) 2 est-il le maximum de f ?
4) Esquisser une courbe possible pour f.

EXERCICE 18

Vrai-Faux

Pour la proposition suivante, dites si elle est vraie ou fausse puis justifier votre réponse

On donne la courbe de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 1}$



Proposition :

f admet un maximum en $x = 0$

Encadrement

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 2$.

Trouver un encadrement de la fonction f pour $x \in [-2\,;\,2]$

Exercice 20

1) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

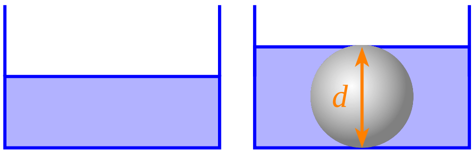
2) En déduire un encadrement sur $[-2;2]$ de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1}{-x^2 + 4x - 3}$

Optimisation

Exercice 21

Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1) Vérifier que d est solution du système : $\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$

2) f est la fonction sur $[0\,;\,80]$ par : $f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$

a) Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;80]$.

b) D'après le tableau de variation, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0;80]$.

c) Déterminer un algorithme permettant de calculer cette solution à 10^{-2} près.

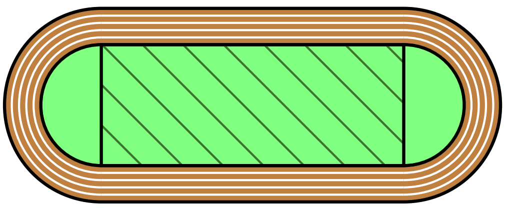
On rappelle que :

- *le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à :* $\pi r^2 h$
- *le volume d'une sphère de rayon r est égal à :* $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

Exercice 22

Stade olympique

Un stade olympique a la forme d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités. La longueur de la piste intérieur est imposée et mesure 400 m.



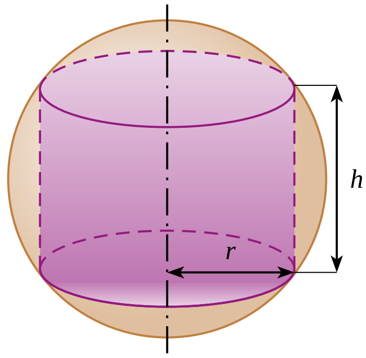
Quelle dimensions doit-on donner au stade pour que la surface rectangulaire hachurée soit maximale ?

Exercice 23

Cylindre inscrit dans une sphère

Dans une sphère de rayon R, on inscrit un cylindre de hauteur h.
Les deux bases du cylindre sont des cercles de la sphère de rayon r.

Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?



Exercice 24

Pharmacologie

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle (pavé droit) dont le volume est 576 mm^3.
On note y la hauteur et la largeur et la longueur sont respectivement x et $2x$. x et y sont exprimées en mm.

a) Calculer y en fonction de x.

b) Calculer la surface totale $S(x)$ en mm^2, de ce pavé droit en fonction de x.

c) x est nécessairement compris entre 3 et 12 mm. Étudier le sens de variation de S en fonction de x. En déduire la valeur de x qui rend S minimum.

Exercice 25

Algorithme Newton-Raphson

La méthode de résolution des équations numériques a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exemples numériques mais la formulation était fastidieuse. Dix ans plus tard, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence.

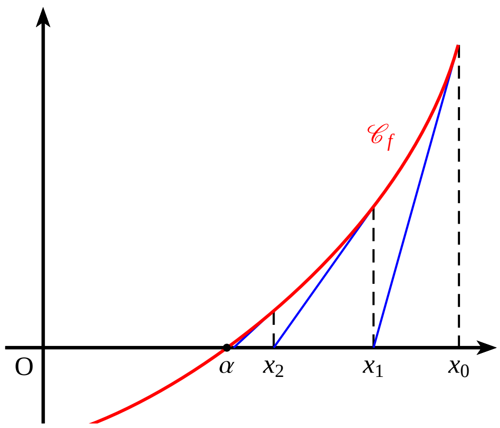
Principe

On cherche à trouver une approximation de la racine de l'équation $f(x) = 0$.
La méthode consiste à introduire une suite (x_n) d'approximation successives de l'équation $f(x) = 0$.

On part d'un x_0 proche de la solution.

À partir de x_0, on calcule un nouveau terme x_1 de la manière suivante : on trace la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 comme indiqué sur le figure ci-contre.

On réitère ce procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1, puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite ....



Partie A : Formule de récurrence

Soit x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de la tangente (T_n) à $\mathscr{C}_f$ en x_n avec l'axe des abscisses.

1) Déterminer l'équation de la tangente en x_n.
2) Montrer alors que l'on a : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
3) Quelles conditions doit vérifier f pour que la suite (x_n) existe sur $\mathbb{N}$?
   On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.

Partie B : Un exemple

Le but est de trouver une approximation à 10^{-3} près de la solution de : $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x - 5$

1) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ puis montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2\,;3]$.
2) Soit la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
   On admet que la suite (x_n) converge vers α.
   a) Remplir à la main le tableau suivant :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}

   b) Si l'on prend comme critère d'arrêt $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < p$ où p correspond à la précision, quelle est la précision de α obtenue par ce tableau ?
   c) Que peut-on dire de la performance de cet algorithme ?

Partie C : Algorithme

On recherche un nombre x vérifiant $\cos x = x$. On pose alors $f(x) = \cos x - x$

1) Calculer la fonction dérivée f' puis montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.
2) Écrire un programme permettant de déterminer α à 10^{-6} près et le nombre de boucles nécessaires.
   On prendra comme critère $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < p$ où p correspond à la précision.
   Faire fonctionner ce programme pour trouver α à 10^{-6} près.

Exercice 26

Vitesse instantanée et calculatrice

Les nombres $\dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ et $\dfrac{f(t_0+h) - f(t_0-h)}{2h}$ pour h est assez petit, sont des valeurs approchées du nombre dérivé de la fonction f en t_0. Le deuxième est utilisé par les calculatrices.

Un point M se déplace sur une droite. Sa position à l'instant t est caractérisée par son abscisse : $x = f(t)$ où f est une fonction dérivable en t_0. Par définition, on appelle vitesse instantanée de M à l'instant t_0 le nombre dérivé de f en t_0 : $f'(t_0)$.

Dans la pratique, on utilise deux valeurs approchées de cette vitesse :

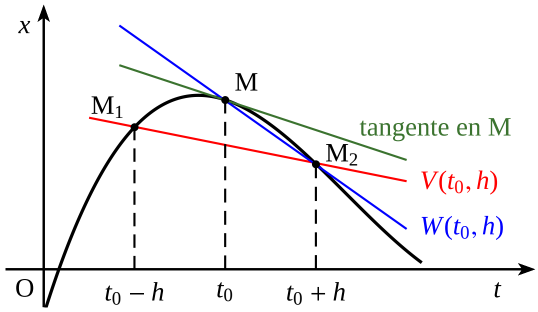
$$V(t_0, h) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 - h)}{2h} \qquad \text{pour } h \text{ "assez petit"}$$
$$W(t_0, h) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \qquad \text{pour } h \text{ "assez petit"}$$

On se propose de comparer ces deux approximations.
On introduit $\varphi(t_0, h) = V(t_0, h) - f'(t_0)$ et $\mu(t_0, h) = W(t_0, h) - f'(t_0)$.

Remarque :

$V(t_0, h)$ est le coefficient directeur de la droite (M1M2).

$W(t_0; h)$ est le coefficient directeur de la droite (MM2).



Partie A. Comparaison des approximations dans des cas particuliers

1) Mouvement uniforme : $f(t) = at + b$ $(a \neq 0)$.
   a) Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0, h)$, $W(t_0, h)$.
   b) Calculer $\varphi(t_0, h)$ et $\mu(t_0, h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c) Conclure.
2) Mouvement uniformément accéléré : $f(t) = at^2 + bt + c$ $(a \neq 0)$.
   a) Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0, h)$, $W(t_0, h)$.
   b) Calculer $\varphi(t_0, h)$ et $\mu(t_0, h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c) Conclure.
3) Mouvement de loi horaire $f(t) = t^3$.
   a) Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0, h)$, $W(t_0, h)$.
   b) Calculer $\varphi(t_0, h)$ et $\mu(t_0, h)$.
   c) On se place à l'instant $t_0 = 1$; expliciter $\varphi(1, h)$ et $\mu(1, h)$.
   Démontrer que, pour tout $h \in]-0,1\,;\,0,1[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(1, h)}{\mu(1, h)}\right| < 1$.
   d) Conclure.
4) Mouvement de loi horaire $f(t) = \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   a) Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0, h)$, $W(t_0, h)$.
   b) Calculer $\varphi(t_0, h)$, $\mu(t_0, h)$ et $\dfrac{\varphi(t_0, h)}{\mu(t_0, h)}$.
   c) Déterminer un nombre réel strictement positif ε tel que, pour tout nombre réel h élément de l'intervalle $]-\varepsilon\,;\,+\varepsilon[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(1, h)}{\mu(1, h)}\right| < 1$. Conclure.

Partie B. Rôle de l'hypothèse de dérivabilité

Les deux approximations du nombre dérivé de f en t_0 supposent évidemment la dérivabilité de f en t_0.

Soit $f(t) = |t|$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Calculer $V(0, h)$ et $W(0, h)$. Donner les valeurs exactes de $V(0; 10^{-6})$ et de $W(0, 10^{-6})$.

Conclure.

Partie C. La machine dicte sa loi

De nombreuses calculatrices donnent le nombre dérivé d'une fonction en un point t_0, mais elles affichent en fait la valeur de $V(t_0, h)$ pour h "très petit". Selon les calculatrices, le paramètre h peut ou doit être défini par l'utilisateur (voir mode d'emploi).

Remplir le tableau ci-contre en indiquant le nombre dérivé de la fonction f en t_0 affiché par la calculatrice. Certaines réponses sont aberrantes. Pourquoi ?

$f(t)$ \ t_0	-5	-2	0	2	5
t^2					
t^3					
$\dfrac{1}{t}$					
$|t|$					