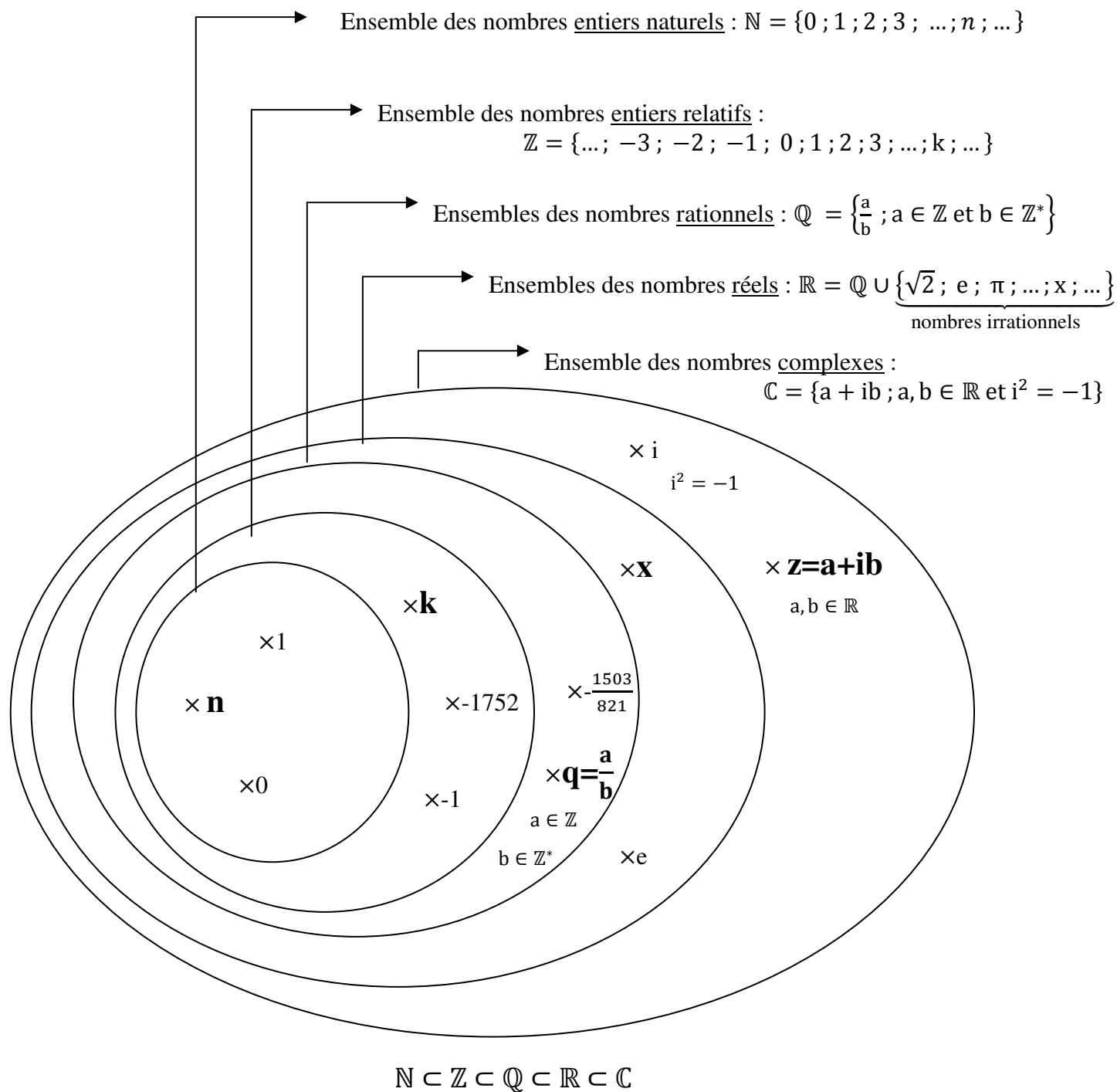


1. Calculs de base



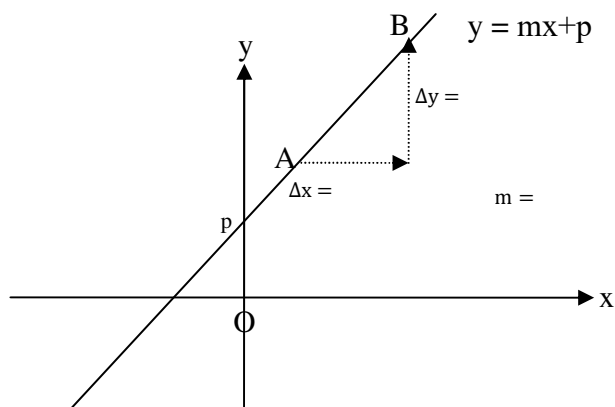
Placer les nombres ci-dessous dans leur ensemble respectif:

$$10^3; \frac{1}{6}; 1; -1; \frac{1}{3}; 0; \sqrt{2}; -1; 2; \sqrt{\frac{4}{9}}; \pi; -0.008;$$

$$\frac{3}{25}; i = \sqrt{-1}; -10025; 3; 14; \frac{3}{10^6}; \sqrt{9}; 1 + 2i; 1 + 0i; 2i; \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $a \neq 0$	$a^0 = 1$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $b \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $b \neq 0 \text{ et } a \neq 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ $b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$	$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ $b \neq 0, c \neq 0$	$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $a \neq 0$	$ax + b \leq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b}{a} \text{ si } a > 0 \\ x \geq -\frac{b}{a} \text{ si } a < 0 \end{cases}$
Soit $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Soit $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \sqrt{x} = x$	Soit $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$	Soit $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$
$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases} = a $	Soit $a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$	$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y$ $x \geq 0, y \geq 0$	$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y$ $\text{Si } x \geq 0, y \geq 0$
$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ $x \geq 0, y \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$ $x \geq 0, y \geq 0, (x, y) \neq (0, 0)$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geq 0, b > 0$
Soit x , un nombre positif et n un entier naturel non nul, la racine $n^{\text{ième}}$ de x , notée $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est le nombre réel positif y tel que $y^n = x$			
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 + 2ab + b^2 = a^2(1 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2})$ $\xrightarrow{\text{on factorise par } a^2 \text{ si } a \neq 0}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$		$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	
Factorisation et signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: on résout $P(x) = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ - Si $\Delta > 0$, P possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est la factorisation de P. "$P(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines". - Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)^2$ est la factorisation de P. $P(x)$ est du signe de a. - Si $\Delta < 0$, P possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{ \Delta }}{2a}$, alors $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$. P est du signe de a.			
Factoriel d'un entier naturel Soit n, un entier naturel non nul, on appelle factoriel de n et on note $n!$, le produit des n premiers entiers naturels : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ Par convention $0! = 1$. Exemple : $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$ etc... On remarque que $4! = 4 \times 3!$ ou encore que $5! = 5 \times 4!$, plus généralement : $n! = n \times (n - 1)!$			

Equation (réduite) de la droite (AB) $y = m.x + p$ où m est le coefficient directeur (la pente) de (AB) et p est l'ordonnée à l'origine.



Calcul de la pente m :

Si on connaît les coordonnées de A et B : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ($A \neq B$)

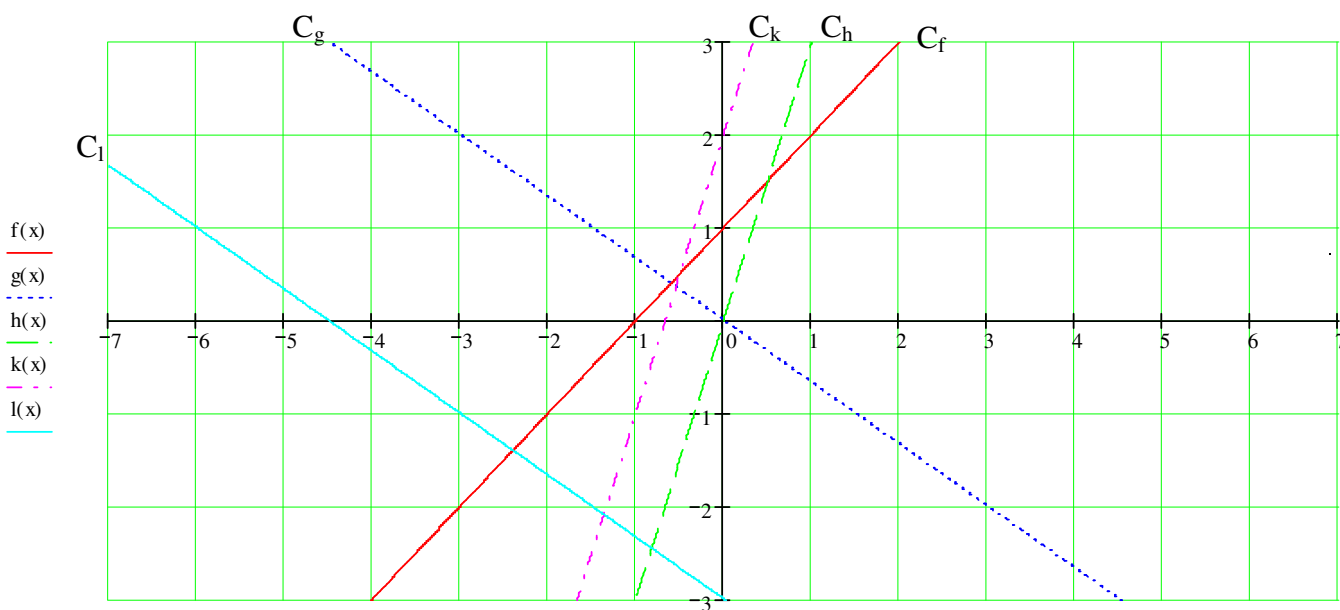
Calcul de l'ordonnée à l'origine p :

Si on connaît le point Q, intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées, on en déduit facilement $p = y_Q$,
sinon, on résout l'équation : $y_A = m.x_A + p$ (en effet, $A \in (AB)$),
et on obtient : $p = y_A - m.x_A$

Remarque : Δy et Δx sont proportionnels, puisque $\Delta y = m.\Delta x$

Application:

Chacune des droites représente dans le repère orthogonal ($O ; i, j$) une fonction affine ou linéaire, donner l'expression de chaque fonction.



Exercices d'application

Exercice 1 Un peu de calcul...

1) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers, les nombres suivants :

$$A = 2\sqrt{45} + \sqrt{225} - \sqrt{20} + \sqrt{125} \text{ et } B = \frac{8}{\sqrt{5}-3}.$$

2) Simplifier les expressions suivantes : $C = \frac{(0,06)^2 \times 10^4}{3^3 \times 4}$; $D = \frac{8^3 \times 20}{12}$; $\frac{C}{D}$;

$$E = 7X^6 - (2X^2)^3 ; F = \frac{(x^2y)^5}{3x^2y^{-1}} \text{ avec } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \quad G = ((x^2)^3)^4$$

3) Ecrire sous forme de puissances de 2 les nombres suivants : 12×16^2 et $8^3 \times 14$

Exercice 2 Résolution d'équations et d'inéquations dans l'ensemble des réels

1) $2x - 3 = x + 5$

2) $5(3t - 1) - 4(t + 1) = 2(t + 3)$

3) $\frac{1-x}{4} - \frac{3x-2}{2} \geq \frac{2x+5}{6}$

4) $2x^2 - x - 6 = 0$

5) $4r^2 + 4r + 1 = 0$

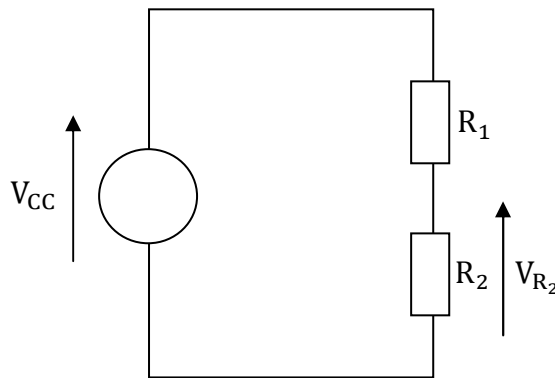
6) $\theta^2 - \theta + 7 = 0$

7) $(t - 2)(t^2 - 9) < 0$

Exercice 3 Pont diviseur de tension

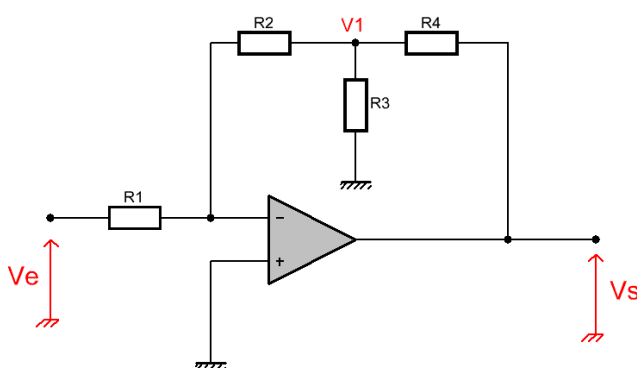
Soit V_{CC} , la tension aux bornes du générateur, et V_{R_2} , la tension aux bornes de la résistance

R_2 . On obtient alors la relation suivante : $V_{R_2} = V_{CC} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1}$.



On souhaite obtenir $V_{R_2} = 2 \text{ V}$. Quelle valeur donner à R_2 , sachant que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $V_{CC} = 5 \text{ V}$? Etablir d'abord l'expression littérale puis faire l'application numérique.

Exercice 4 Théorème de Millman appliqué à un amplificateur inverseur à gain forcé.



On souhaite obtenir une relation entre la sortie V_s et l'entrée V_e , pour cela :

1) Exprimons tout d'abord la tension centrale V_1 de ce réseau, sachant que la résistance R_2 se retrouve indirectement à la masse par le biais de l'entrée inverseuse ($V_- = V_+ = 0$), on obtient la relation suivante :

$$V_1 = V_s \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4} \text{ Simplifier } V_1.$$

2) A l'aide du théorème de Millman, on peut écrire la tension à l'entrée inverseuse :

$$V_- = \frac{\frac{V_e + V_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}, \text{ simplifier } V_-. \text{ Puis remplacer } V_1 \text{ par l'expression simplifiée de la question 1).}$$

3) $V_- = 0$. Dédurre de 2) que : $\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right)$

Exercice 5 Capteur d'humidité

Sur la notice d'un capteur d'humidité, on peut trouver les schémas suivants :

FIGURE 2: OUTPUT VOLTAGE VS RELATIVE HUMIDITY AT 0 °C

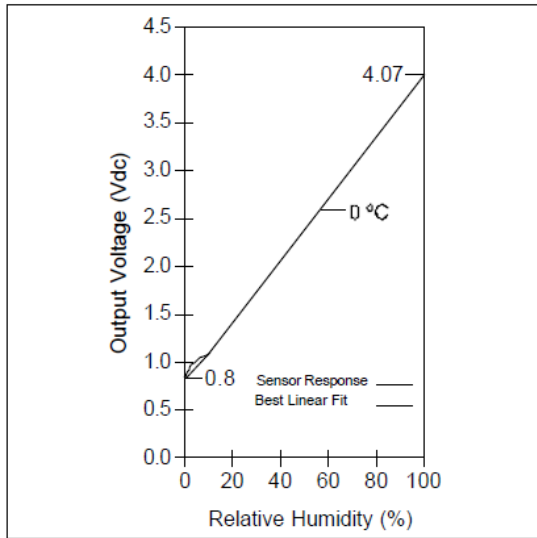
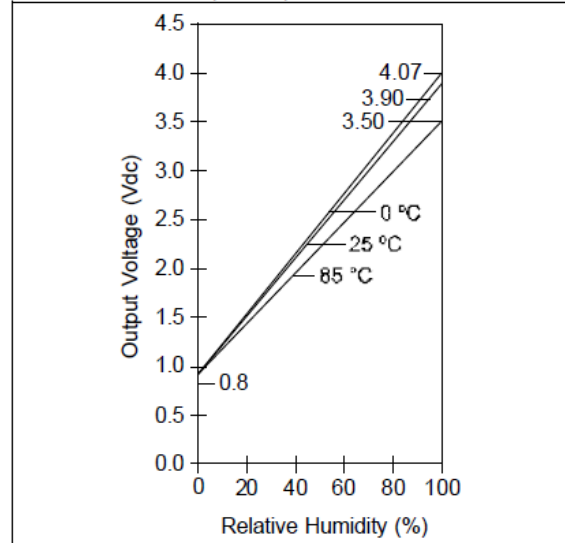


FIGURE 3: OUTPUT VOLTAGE VS RELATIVE HUMIDITY AT 0 °C, 25 °C, 85 °C



1) Interprétation de la figure 2 : A la température de 0°C, si le taux d'humidité de la salle de bain vaut 0%RH, quelle sera la tension de sortie du capteur ? Les grandeurs Tension et Taux d'humidité sont-elles proportionnelles ?

2) On note H le taux d'humidité en entrée et V_s la tension de sortie du capteur, exprimer V_s en fonction de H lorsque la température de la salle de bain est de 0°C.

3) Même question lorsque la température de la salle de bain est de 85°C.

Exercice 6 Convertisseur Température / Tension.

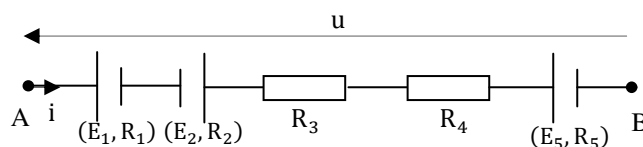
Une interface convertit la température T en °C en tension U en Volt. La gamme de températures en entrée est (10°C - 40°C) et la gamme de tensions en sortie est (0 V - 10 V). (A 10°C on obtient 0 V en sortie, et à 40°C on obtient 10 V en sortie)

1) Si la température en entrée est de 25°C, quelle est la tension de sortie ?

2) Si la tension de sortie est de 3V, quelle est la température à l'entrée ?

3) Soit T, la température à l'entrée et U, la tension de sortie, exprimer U en fonction de T, puis représenter les variations de U en fonction de T.

Exercice 7 Soit la branche AB d'un circuit non représenté :



On donne : $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_2 = 6 \text{ V}$; $E_5 = 4 \text{ V}$; $R_1 = R_3 = R_5 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$ et $R_4 = 5 \Omega$.
L'expression de la tension u , en fonction de l'intensité i est :

$$u = R_5 i + E_5 + R_4 i + R_3 i - E_2 + R_2 i + R_1 i + E_1$$

Représenter les variations de u en fonction de i .

Exercice 8 Le rendement d'un moteur à excitation indépendante est le nombre η déterminé par : $\eta = \frac{P_u}{P_a + P_{je}}$ où P_u est la puissance utile, P_a la puissance absorbée et P_{je} la puissance perdue par effet joule dans le circuit d'excitation.

- 1) Déterminer P_u en fonction de η , P_a et P_{je} .
AN : $\eta = 0,90$; $P_a = 9,50 \text{ kW}$; $P_{je} = 0,20 \text{ kW}$
- 2) Déterminer P_a en fonction de η , P_u et P_{je} .
AN : $\eta = 0,90$; $P_u = 10 \text{ kW}$; $P_{je} = 0,15 \text{ kW}$
- 3) Déterminer P_{je} pour que le rendement soit supérieur à 0,9 sachant que $P_u = 8 \text{ kW}$ et $P_a = 8,5 \text{ kW}$

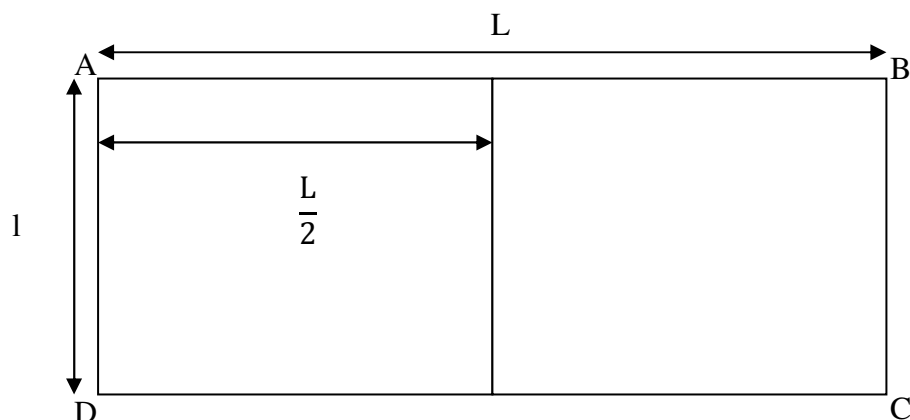
Exercice 9 Résistances équivalentes

Soit r , une résistance telle que : $r = 10 \Omega$.

- 1) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} = x$
- 2) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} \geq x$.

Exercice 10 Format A4

Soit un rectangle de longueur L et de largeur l ($l > \frac{L}{2}$). On suppose que lorsque le rectangle est coupé en 2 selon la figure ci-dessous, le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est conservé.



Calculer le rapport $\frac{L}{l}$ et en déduire L et l si l'aire du rectangle est 1 m^2 (On dira que le rectangle ABCD est de format A_0). On itère le découpage dans les mêmes conditions indiquées plus haut. Quelles sont les dimensions d'une feuille de format A_4 ?

