Suites - Exercices

A. Calculs de termes et variations

(exercices pour commencer : calculer les premiers termes d'une suite, conjecturer son sens de variations, puis démontrer la conjecture en calculant $u_{n+1} - u_n$)

Série 1

a) $u_n = 2^n - n$

b) $u_n = (n-5)^2$

c) $u_n = \frac{n}{3^n}$

d) $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$

Série 2

a) $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2$ et $u_0 = -4$

b) $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

c) $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $u_0 = 3$

d) $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

B. Suites arithmétiques

Exercice 1

a) (u_n) est est une suite arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $u_{10} = 65$. Calculer u_{20}.
b) (u_n) est est une suite arithmétique telle que $u_4 = 12$ et $u_8 = 4$. Calculer u_{20}.

Exercice 2

Parmi les suites suivantes, quelles sont celles qui sont des suites arithmétiques ?
a) $u_n = -2n + 3$
b) $u_n = n^3 - 3n^2 + 2$
c) $u_n = (n+1)^2 - n^2$
d) $u_n = 5 + 2n$
e) $u_{n+1} = u_n + n - 1$ et $u_0 = 3$

Exercice 3

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$.
On sait que $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} = 253$. Calculer u_{20}.

C. Calculs de sommes

Exercice 1

(repérer des suites arithmétiques ou géométriques, puis calculer la somme de leurs termes)
a) S = 0,25 + 0,5 + 0,75 + 1 + ... + 12,5 rép : 318,75
b) S = 0,02-0,1+0,5-2,5+ ..... + 312,5 rép : 260,42
c) S = 4/5 + 7/5 + 2 + ... + 11 rép : 531/5

d) S = 1+ $\sqrt{2}$ +2+.....+ $8\sqrt{2}$ rép : $15(1+\sqrt{2})$

Exercice 2

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
Calculer les sommes :
A = $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{99}$
B = $u_{100} + u_{101} + u_{102} + ... + u_{199}$
C = $u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{100}$

D. Etudes de suites récurrentes

Plan général :
- calcul des premiers termes pour voir s'il peut s'agir d'une suite arithmétique ou géométrique
- étude numérique à la calculette ou étude graphique pour tester la converge
- définition d'une suite auxiliaire qui est arithmétique ou géométrique
- expression en fonction de n et calcul de la limite.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 1$, alors $u_n = 1$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 1$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2+u_n}{1-u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n-6}{u_n-1}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 2$, alors $u_n = 2$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 2$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Soient f et g les fonctions définies sur [1 ; 4] par $f(x) = x$ et $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

Construire les représentations graphiques de f et g, en déduire les représentations graphiques de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ... De quel nombre semble se rapprocher u_n ?

3) Montrer que si $u_{n+1} = -1$, alors $u_n = -1$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq -1$.
4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
5) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
6) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 4

(ici la suite auxiliaire est arithmétique)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 7u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 0$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2 - u_n}{u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?