

Exercices supplémentaires : Suites

Partie A : Calculs de termes et représentation graphique

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 4n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Exercice 3

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 8, v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{v_{n+2} - v_n}{2}$$

Calculer v_2, v_3, v_4 et v_5 .

Exercice 4

Représenter graphiquement les points d'affixe u_n pour n entre 0 et 7 dans chacun des cas suivants :

- a) $u_n = 2n - 1$
- b) $u_n = n^2 - 4n - 5$
- c) $u_n = (-1)^n$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- 1) Donner l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- 2) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 5]$ (unité graphique 3 cm)
- 3) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- 4) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de (u_n) ?

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n}$$

- 1) Donner l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- 2) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0; 4]$ (unité graphique 3 cm)
- 3) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- 4) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de (u_n) ?

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Exercice 8

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = -n^2 + 2n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- 2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 3) Exprimer v_{n+1} en fonction de n .
- 4) En déduire que $v_{n+1} - v_n = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B : Variations d'une suite

Exercice 1

Etudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par

- 1) $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

- 2) $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 3) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- 4) $u_n = -\frac{2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 5) $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 6) $u_n = \frac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- 7) $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 8) $u_n = \frac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Etudier le sens de variations de (u_n) .
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq 1$.

Exercice 3

On considère (u_n) définie par $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Etudier le sens de variations de (u_n) .
- 2) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq u_n \leq 2$.
- 4) A partir de quel entier n tous les termes de la suite sont-ils compris entre 1,5 et 2 ? Justifier.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
- 2) La suite est-elle monotone ?
- 3) Résoudre l'inéquation $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ dans $\mathbb{N}$.
- 4) Quel est le sens de variations de (u_n) à partir du rang 3 ?
- 5) Déterminer un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 10^{50}$.
- 6) Justifier que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^{50}$.

Exercice 5

On lance un dé cubique bien équilibré. On répète n fois cette expérience de façon identique et indépendante.

- 1) Justifier que la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois 6 est $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
- 2) Déterminer le sens de variations de (p_n) . Interpréter dans la situation donnée.
- 3) Déterminer un nombre n_0 de lancers pour lequel la probabilité d'obtenir au moins un 6 est supérieure à 0,5.
- 4) Pourquoi est-on sûr que pour $n \geq n_0$, on a $p_n \geq 0,5$?
- 5) Combien de lancers doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 0,6 ? 0,8 ? 0,9 ? 0,95 ? 0,99 ?

Exercice 6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 0,9^n$ pour $n \geq 1$.

- 1) Déterminer le sens de variations de ces deux suites.
- 2) A l'aide d'une représentation graphique, conjecturer leurs limites et les comparer.
- 3) Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0} \leq u_{n_0}$.
- 4) Justifier que si pour un entier $q \geq 34$, on a $v_q < u_q$ alors $v_{q+1} < \frac{0,9}{q} < u_{q+1}$.
- 5) Comparer alors v_{100} et u_{100} puis v_{1000} et u_{1000} .

Partie C : Suite arithmétique

Exercice 1

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 3$.

Calculer u_1, u_2, u_{10} et u_{30} .

Exercice 2

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 763$ et de raison $r = -2$.

Calculer u_{10} et u_{2013} .

Exercice 3

On considère une suite arithmétique (u_n) telle que $u_3 = 7$ et $u_7 = 19$.

Calculer u_0 et la raison r .

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si (u_n) est arithmétique ou non.

- 1) $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 2) $u_0 = -7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 3) $u_n = \frac{7}{2}n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 4) $u_n = n^2 + 7n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{22}$.

Exercice 6

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 653$ et de raison $-\frac{3}{2}$.

Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{871}$.

Exercice 7

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $\frac{5}{4}$.

- 1) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2) Combien vaut u_{40} ?
- 3) Existe-t-il un entier n tel que $u_n = 772$?

Exercice 8

Sans utiliser la calculatrice, comparer

$$A = 2012(1 + 2 + \dots + 2013) \quad \text{et} \quad B = 2013(1 + 2 + \dots + 2012)$$

Exercice 9

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison négative.

On sait que la somme des trois premiers termes vaut 81 et que leur produit vaut 18360.

- 1) On note r la raison de cette suite. Exprimer u_0 et u_2 en fonction de u_1 et r .
- 2) Montrer qu'on a le système suivant :

$$\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$$

- 3) En déduire la valeur de r et de u_1 .
- 4) Calculer u_{40} .

Exercice 10

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison positive. On sait que la somme des trois premiers termes vaut 60 et que la somme de leur carré vaut 1218.

Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 11

On souhaite répartir 10kg de blé entre 10 hommes en parts inégales de telle sorte que la différence entre un homme et son voisin se monte à $\frac{1}{8}$ de kg de blé.

On notera $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ la part reçue respectivement par le 1^{er} homme, le 2^{ème} homme, ..., le 10^{ème} homme.

- 1) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- 2) Déterminer la raison de cette suite.
- 3) En déduire la valeur des termes $u_1, u_2, \dots, u_{10}$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
- 3) On suppose que pour tout n , $u_n \neq 0$ et on définit une suite (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est arithmétique et donner les éléments caractéristiques.

- 4) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 5) Etudier les variations de la suite (u_n) .
- 6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
- 2) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 3) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 50$.

Correction Exercices supplémentaires : Suites

Partie A : Calculs de termes et représentation graphique

Exercice 1

$$u_0 = 0^2 - 4 \times 0 - 3 = \boxed{-3} \quad u_1 = 1^2 - 4 - 3 = \boxed{-6} \quad u_2 = 2^2 - 4 \times 2 - 3 = \boxed{-7} \quad u_3 = 3^2 - 4 \times 3 - 3 = \boxed{-6}$$

Exercice 2

$$u_1 = 2u_0 + 0 - 4 = 2 \times (-2) - 4 = \boxed{-8} \quad u_2 = 2u_1 + 1 - 4 = 2 \times (-8) - 3 = \boxed{-19}$$
$$u_3 = 2u_2 + 2 - 4 = 2 \times (-19) - 2 = \boxed{-40} \quad u_4 = 2u_3 + 3 - 4 = 2 \times (-40) - 1 = \boxed{-81}$$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{v_{n+2} - v_n}{2} \Leftrightarrow 2v_{n+1} = v_{n+2} - v_n \Leftrightarrow v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$$

$$\text{Donc } v_2 = 2v_1 + v_0 = 2 \times 4 + 8 = \boxed{16}$$

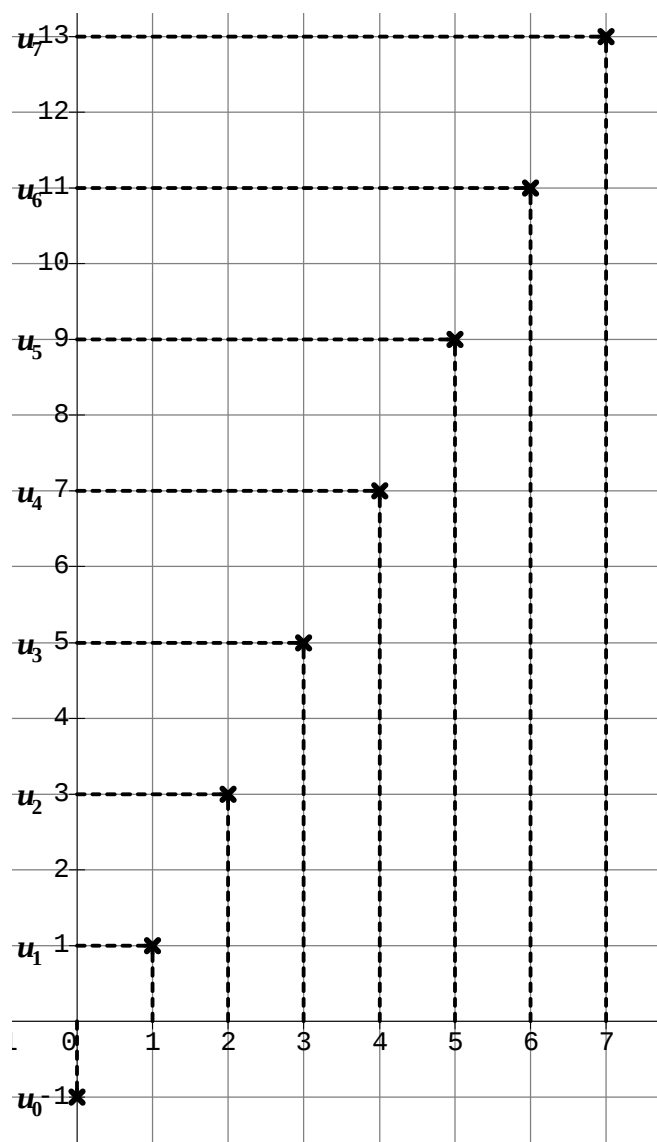
$$v_3 = 2v_2 + v_1 = 2 \times 16 + 4 = \boxed{36}$$

$$v_4 = 2v_3 + v_2 = 2 \times 36 + 16 = \boxed{88}$$

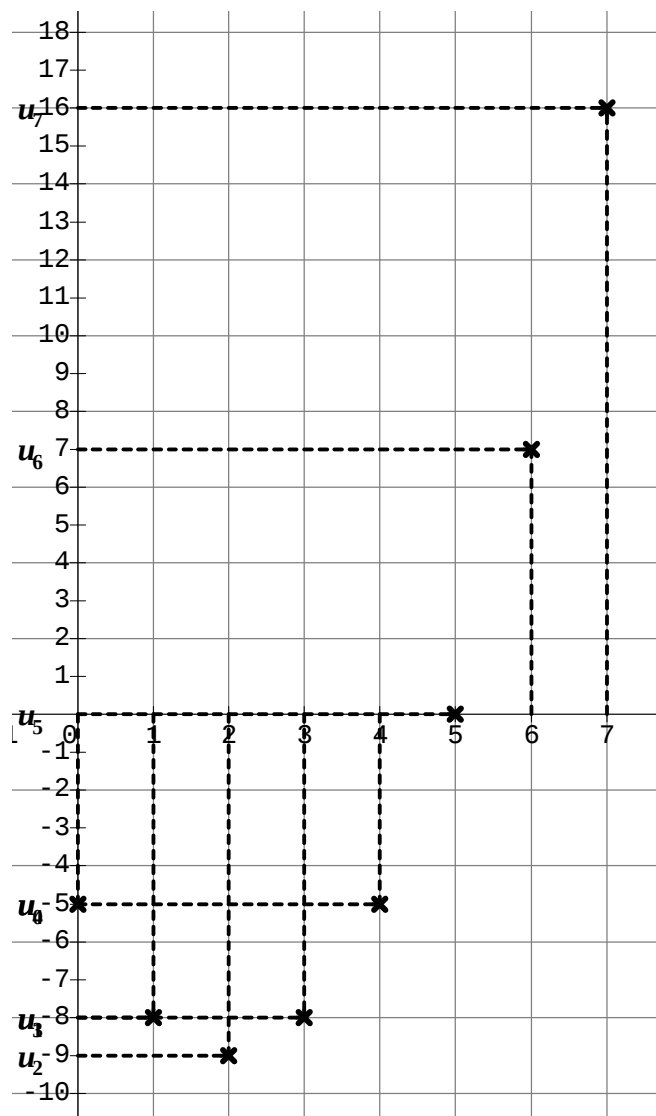
$$v_5 = 2v_4 + v_3 = 2 \times 88 + 36 = \boxed{212}$$

Exercice 4

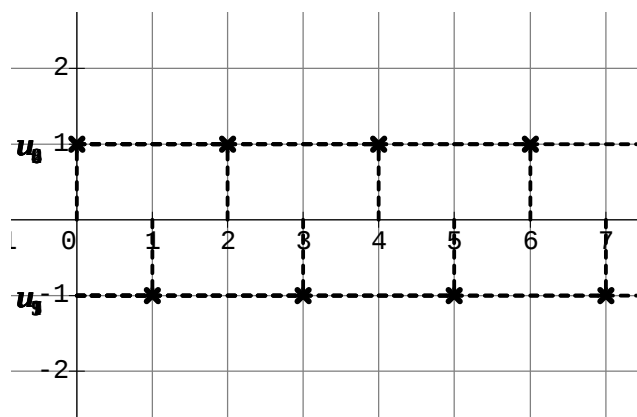
a) $u_n = 2n - 1$



b) $u_n = n^2 - 4n - 5$



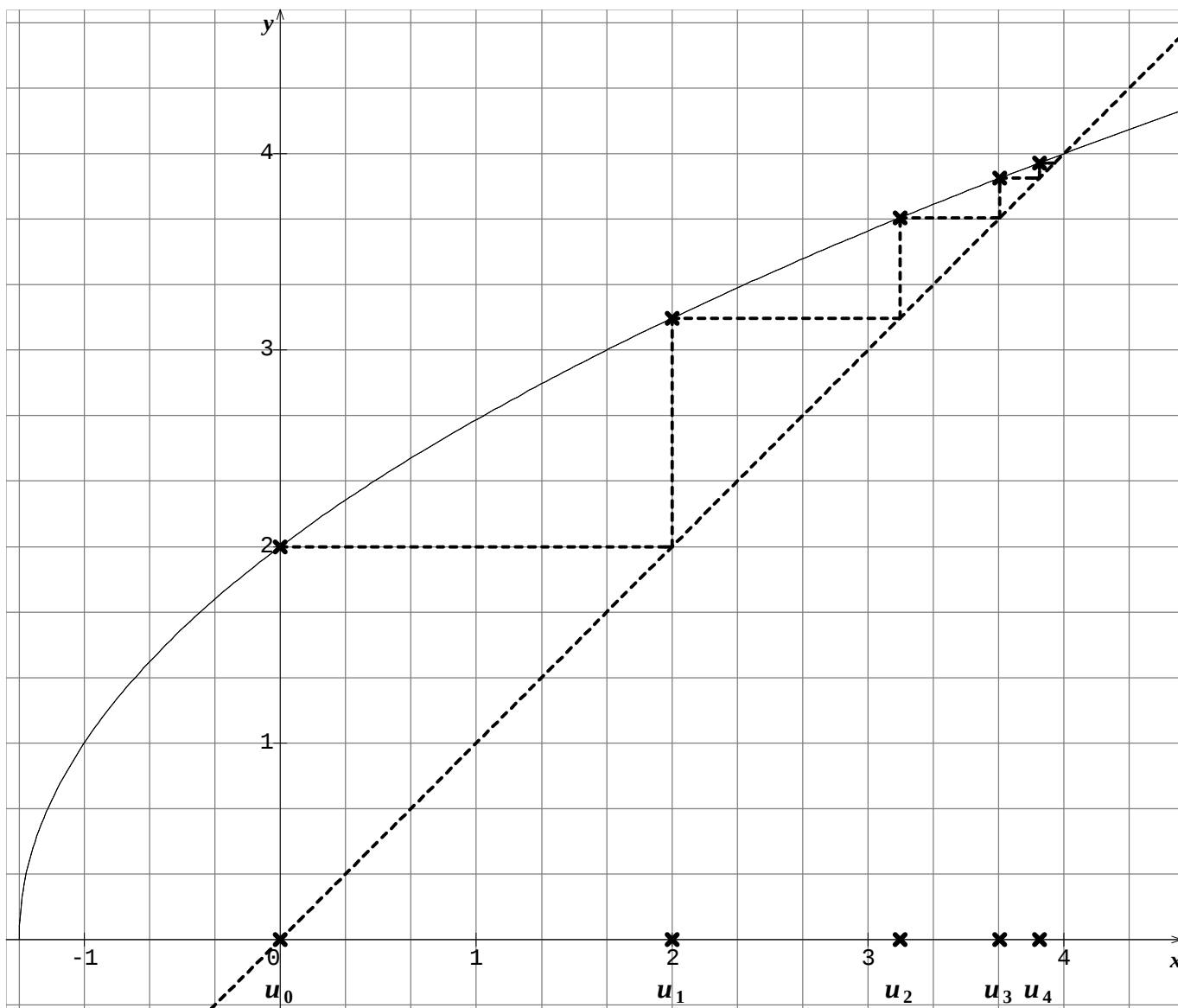
c) $u_n = (-1)^n$



Exercice 5

1) $f: x \mapsto \sqrt{3x+4}$ définie sur $\left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$

2)



3) Voir ci-dessus

4) D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante.

Exercice 6

1) $f: x \mapsto \frac{1+x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a donc $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

2)

3) Voir ci-contre

4) Il semble que la suite (u_n) ne soit pas monotone :

$$u_1 > u_0 \text{ et } u_2 < u_1 \dots$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

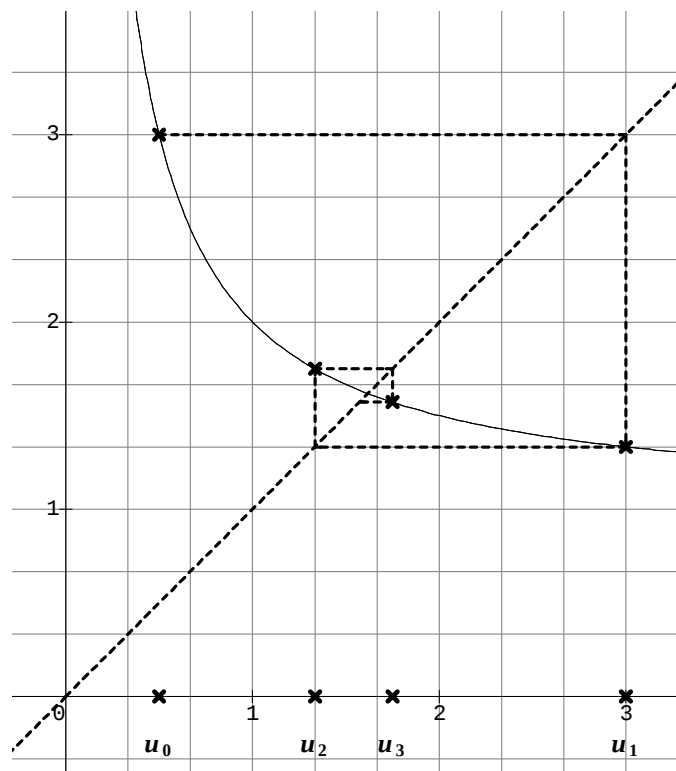
$$u_{n+1} = -3(n+1) + 4 = \boxed{-3n+1}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = -3n + 4 \Leftrightarrow 3n = 4 - u_n \Leftrightarrow n = \frac{4 - u_n}{3}$$

Et donc

$$u_{n+1} = -3n + 1 = -3 \times \frac{4 - u_n}{3} + 1 = -(4 - u_n) + 1 \\ = \boxed{u_n - 3}$$



Exercice 8

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = -(n+1)^2 + 2(n+1) = -n^2 - 2n - 1 + 2n + 2 = \boxed{-n^2 + 1}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = u_{n+1} - u_n = -n^2 + 1 - (-n^2 + 2n) = -n^2 + 1 + n^2 - 2n = \boxed{-2n + 1}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = -2(n+1) + 1 = \boxed{-2n - 1}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = -2n - 1 - (-2n + 1) = -2n - 1 + 2n - 1 = \boxed{-2}$$

Partie B : Variations d'une suite

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geq 0 \text{ car } n \text{ est un entier positif}$$

Donc (u_n) est croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto 3x - 5$ qui est une fonction affine avec $a = 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et donc (u_n) est croissante.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{n+1+4} - \left(-\frac{2}{n+4}\right) = -\frac{2}{n+5} + \frac{2}{n+4} = \frac{-2(n+4) + 2(n+5)}{(n+4)(n+5)} = \frac{2}{(n+4)(n+5)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1}}{n+1} - \frac{5^n}{n} = \frac{5^{n+1} \times n - 5^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{5^n(5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{5^n(4n - 1)}{n(n+1)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 1 - (2n^2 - 1) = 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 + 1 = 4n + 2 > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} = \frac{3^{n+1} \times n - 3^n \times (n+1)}{2n(n+1)} = \frac{3^n(3n - n - 1)}{2n(n+1)} = \frac{3^n(2n - 1)}{2n(n+1)} > 0$$

Donc (u_n) est croissante.

Exercice 2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2} - \frac{n^2 + 1}{2n^2} = \frac{(n^2 + 2n + 2) \times n^2 - (n^2 + 1)(n^2 + 2n + 1)}{2n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + 2n^2 - n^4 - 2n^3 - n^2 - n^2 - 2n - 1}{2n^2(n+1)^2} = \frac{-2n - 1}{2n^2(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante.

2) Pour tout $n \geq 1$

$$u_n - 1 = \frac{n^2 + 1}{2n^2} - \frac{2n^2}{2n^2} = \frac{1 - n^2}{2n^2} = \frac{(1-n)(1+n)}{2n^2}$$

Or $1 - n$ est négatif car $n \geq 1$.

$1 + n$ et $2n^2$ sont positifs donc $u_n - 1$ est négatif et donc $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

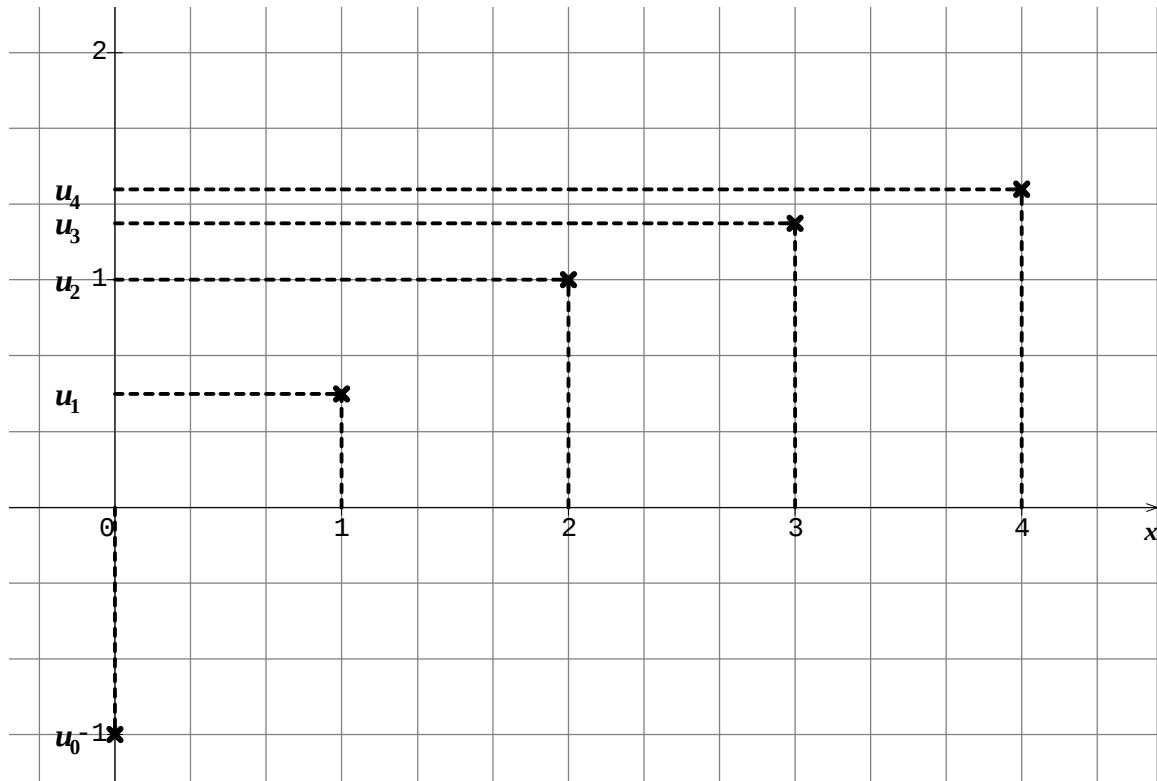
Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = f(n)$ avec $f: x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ définie sur $[0; +\infty[$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto 2x - 1$ dérivable sur $[0; +\infty[$ et $v: x \mapsto x + 1$ dérivable et non nul sur $[0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et donc (u_n) est croissante.

2)



3) $u_0 = -1$ et comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n \geq -1$.

Par ailleurs :

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = -\frac{3}{n+1} < 0$$

Donc $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) D'après la question précédente, on a toujours $u_n \leq 2$. On cherche donc n tel que $u_n \geq 1,5$.

$$u_n \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+1} \geq 1,5 \Leftrightarrow 2n-1 \geq 1,5(n+1) \quad \text{car } n+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5n \geq 2,5 \Leftrightarrow n \geq 5$$

A partir du rang 5, les termes u_n sont compris entre 1,5 et 2.

Exercice 4

$$1) \quad u_1 = \frac{2^1}{1^2} = \boxed{2} \quad u_2 = \frac{2^2}{2^2} = \boxed{1} \quad u_3 = \frac{2^3}{3^2} = \boxed{\frac{8}{9}} \quad u_4 = \frac{2^4}{4^2} = \boxed{1} \quad u_5 = \frac{2^5}{5^2} = \boxed{\frac{32}{25}}$$

2) (u_n) n'est pas monotone car $u_2 > u_3$ et $u_3 < u_4$.

3) $n^2 - 2n - 1 \geq 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 8$ donc il y a deux racines $n_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4$ et $n_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4$. Le signe de $n^2 - 2n - 1$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines donc entre 0 et 2. A partir de 3, $n^2 - 2n - 1$ est donc positif. Les solutions sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 3.

4) Pour $n \geq 3$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^{n+1} \times n^2 - 2^n \times (n^2 + 2n + 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2^n(n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2}$$

D'après la question précédente, $n^2 - 2n - 1$ est positif. De plus 2^n et le dénominateur sont aussi clairement positif donc (u_n) est bien croissante à partir du rang 3.

5) $u_{n_0} \geq 10^{50}$: A la calculatrice : $u_{181} = \frac{2^{181}}{181^2} \approx 9,3 \times 10^{49}$ et $u_{182} \approx 1,8 \times 10^{50}$

Donc on peut choisir $n_0 = 182$.

6) Comme (u_n) est croissante à partir du rang 3, on a $u_n \geq u_{n_0}$ pour $n \geq n_0$ et donc pour $n \geq 182$, on a $u_n \geq 10^{50}$.

Exercice 5

1) On lance n fois le dé de façon indépendante et à chaque lancer, la probabilité d'avoir un 6 est $\frac{1}{6}$. Le nombre X de 6 suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_{n+1} - p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left[1 - \frac{5}{6}\right] = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0$$

Donc (p_n) est croissante.

Concrètement, plus on lance le dé, plus la probabilité d'obtenir au moins un 6 grandit...

3) On cherche n_0 tel que $p_{n_0} \geq 0,5$ or $p_4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > 0,5$ donc on peut choisir $n_0 = 4$

4) (p_n) est croissante donc pour $n \geq n_0$, on a $p_n \geq p_{n_0} \geq 0,5$.

5) Grâce à la calculatrice :

$p_5 \approx 0,598$ et $p_6 \approx 0,665$ donc il faut au moins 6 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,6.

De la même manière, il faut au moins 8 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,8 ;

il faut au moins 13 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,9 ;

il faut au moins 17 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,95 ;

il faut au moins 26 lancers pour que la probabilité d'avoir au moins un 6 dépasse 0,99.

Exercice 6

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f la fonction inverse qui est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc (u_n) est décroissante.

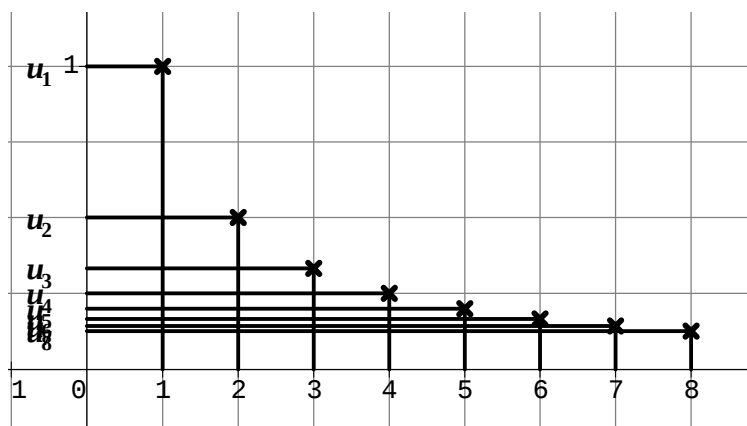
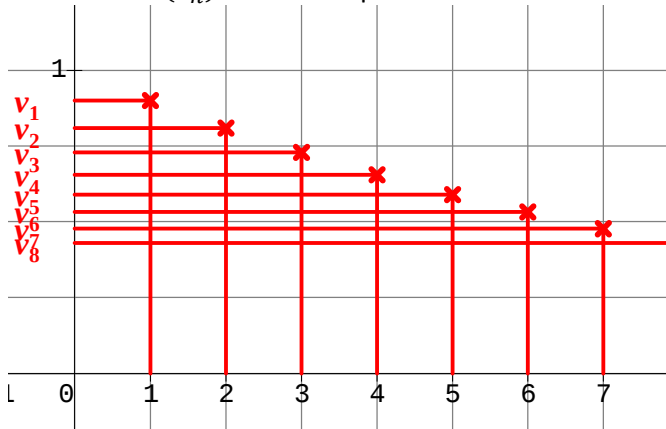
$$v_{n+1} - v_n = 0,9^{n+1} - 0,9^n = 0,9^n(0,9 - 1) = -0,1 \times 0,9^n < 0$$

Donc (v_n) est décroissante.

2)

Pour la suite (u_n) : il semble que la limite soit 0.

Pour la suite (v_n) : il semble que la limite soit aussi 0.



Par ailleurs, il semble que $v_n \geq u_n$, au moins à partir d'un certain rang.

3) $u_1 = 1$ et $v_1 = 0,9$ donc $v_1 \leq u_1$. On peut donc choisir $n_0 = 1$.

4) On suppose qu'il existe un entier $q \geq 34$ tel que $v_q < u_q$. Alors

$$v_{q+1} = 0,9^{q+1} = 0,9 \times 0,9^q = 0,9 \times v_q < 0,9 \times u_q \text{ or } u_q = \frac{1}{q} \text{ donc } v_{q+1} < \frac{0,9}{q}$$

$$\text{De plus, } u_{q+1} - \frac{0,9}{q} = \frac{1}{q+1} - \frac{0,9}{q} = \frac{q-0,9(q+1)}{q(q+1)} = \frac{0,1q-0,9}{q(q+1)} > 0 \text{ car } q \geq 34 \text{ donc } u_{q+1} > \frac{0,9}{q}.$$

$$\text{Finalement, on a bien } v_{q+1} < \frac{0,9}{q} < u_{q+1}$$

5) $u_{34} \approx 0,0294$ et $v_{34} \approx 0,0278$ donc $v_{34} < u_{34}$.

D'après la question précédente, on a donc $v_{35} < u_{35}$ et de proche en proche, on a $v_{100} < u_{100}$ et $v_{1000} < u_{1000}$.

Partie C : Suite arithmétique

Exercice 1

$$u_1 = u_0 + r = \boxed{7} \quad u_2 = \boxed{10}$$

$$u_{10} = u_0 + 10r = 4 + 30 = \boxed{34}$$

$$u_{30} = u_0 + 30r = 4 + 30 \times 3 = \boxed{94}$$

Exercice 2

$$u_{10} = u_0 + 10r = 763 - 20 = \boxed{743}$$

$$u_{2013} = u_0 + 2013r = 763 - 2013 \times 2 = \boxed{-3263}$$

Exercice 3

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = u_0 + 3r \\ 19 = u_0 + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 7 - 3r \\ 19 = 7 - 3r + 7r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 7 - 3r \\ 4r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_0 = -2 \\ r = 3 \end{cases}}$$

Exercice 4

1) $u_0 = 8$

$$u_1 = -u_0 + 2 = -8 + 2 = -6$$

$$u_2 = -u_1 + 2 = 6 + 2 = 8$$

Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5$ donc (u_n) est arithmétique de raison -5 .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{2}(n+1) - 3 - \left(\frac{7}{2}n - 3\right) = \frac{7}{2}n + \frac{7}{2} - 3 - \frac{7}{2}n + 3 = \frac{7}{2}$$

Le résultat ne dépend pas de n donc (u_n) est arithmétique de raison $\frac{7}{2}$.

4) $u_0 = 0 \quad u_1 = 8 \quad u_2 = 18$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 5

(u_n) est arithmétique donc $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$:

De plus, $u_{22} = u_0 + 22r = 3 + 22 \times 2 = 47$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{22} = \frac{u_0 + u_{22}}{2} \times 23 = \frac{3 + 47}{2} \times 23 = \boxed{575}$$

Exercice 6

$$u_{871} = u_0 + 871r = 653 - \frac{3}{2} \times 871 = -\frac{1307}{2}$$

$$u_0 = u_1 + \dots + u_{871} = \frac{u_0 + u_{871}}{2} \times 872 = \boxed{-218}$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr = \boxed{2 + \frac{5}{4}n}$

2) $u_{40} = 2 + \frac{5}{4} \times 40 = \boxed{52}$

3) $u_n = 772 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{4}n = 772 \Leftrightarrow \frac{5}{4}n = 770 \Leftrightarrow n = 770 \times \frac{4}{5} \Leftrightarrow n = 616$

Donc il existe bien une valeur de n telle que $u_n = 772$.

Exercice 8

$$A = 2012 \times \frac{1 + 2013}{2} \times 2013 = \frac{2012 \times 2013 \times 2014}{2}$$

$$B = 2013 \times \frac{1 + 2012}{2} \times 2012 = \frac{2012 \times 2013 \times 2013}{2}$$

Comme $2013 < 2014$, on a $\boxed{A > B}$

Exercice 9

1) $u_1 = u_0 + r$ donc $\boxed{u_0 = u_1 - r}$ De plus, $\boxed{u_2 = u_1 + r}$

2) D'après l'énoncé : $u_0 + u_1 + u_2 = 81$ donc $u_1 - r + u_1 + u_1 + r = 81$ soit $3u_1 = 81$.
De plus $u_0 \times u_1 \times u_2 = 18360$ donc $(u_1 - r) \times u_1 \times (u_1 + r) = 18360$ soit $u_1(u_1^2 - r^2) = 18360$ et donc $u_1^3 - r^2 u_1 = 18360$. Finalement, on a bien le système

$$\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$$

3) Avec la première équation : $u_1 = 27$ et
 $27^3 - 27r^2 = 18360 \Leftrightarrow 19683 - 27r^2 = 18360 \Leftrightarrow r^2 = 49 \Leftrightarrow r = 7$ ou $r = -7$
D'après l'énoncé, la raison est négative donc $r = -7$.

4) $u_{40} = u_0 + 40r = 27 - 7 \times 40 = \boxed{-253}$

Exercice 10

$u_1 = u_1 - r$ et $u_2 = u_1 + r$ donc $u_0 + u_1 + u_2 = 60 \Leftrightarrow u_1 - r + u_1 + u_1 + r = 60 \Leftrightarrow 3u_1 = 60 \Leftrightarrow u_1 = 20$
Et de plus :

$$(u_1 - r)^2 + u_1^2 + (u_1 + r)^2 = 1218 \Leftrightarrow u_1^2 - 2ru_1 + r^2 + u_1^2 + u_1^2 + 2ru_1 + r^2 = 1218$$

$$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 2r^2 = 1218 \Leftrightarrow 2r^2 = 1218 - 3 \times 20^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3 \text{ ou } r = -3$$

D'après l'énoncé, la raison est positive donc $\boxed{r = 3}$.

D'où $u_0 = u_1 - r = \boxed{17}$

Exercice 11

1) D'après l'énoncé, en considérant que (u_n) est croissante, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}$ pour n de 1 à 9.
 (u_n) est donc arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.

2) La raison est $\frac{1}{8}$

3)

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 10 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 10 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = 2 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 9r = 2 \Leftrightarrow 2u_1 = 2 - \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{7}{16}$$

On a donc $u_1 = \frac{7}{16}$; $u_2 = \frac{9}{16}$; $u_3 = \frac{11}{16}$ $u_{10} = \frac{27}{16}$

Exercice 12

1)

$$u_1 = \frac{2u_0}{2 + 3u_0} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$u_2 = \frac{2u_1}{2 + 3u_1} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2 + 3 \times \frac{2}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2) $u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2 + 3u_n}{2u_n} = \frac{2}{2u_n} + \frac{3}{2} = \frac{1}{u_n} + \frac{3}{2} = v_n + \frac{3}{2}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{3}{2}n$

De plus, $u_n = \frac{1}{v_n}$ donc

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}n} = \boxed{\frac{2}{2 + 3n}}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2 + 3(n+1)} - \frac{2}{2 + 3n} = \frac{2(2 + 3n) - 2(2 + 3n + 3)}{(2 + 3n)(2 + 3n + 3)} = \frac{-6}{(2 + 3n)(5 + 3n)} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a clairement $u_n > 0$.

De plus, $u_n - 1 = \frac{2}{2 + 3n} - \frac{2 + 3n}{2 + 3n} = -\frac{3n}{2 + 3n} < 0$

Donc on a bien $u_n < 1$.

Exercice 13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + 3 = v_n + 3$$

donc (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 + nr = \boxed{1 + 3n}$

De plus, par définition, $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$ donc $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 3n}$

3) $u_n \geq 50 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3n} \geq 50 \Leftrightarrow 1 + 3n \geq 50 \Leftrightarrow n \geq \frac{49}{3}$ et donc on doit prendre $n \geq 17$.